KOMBINÁCIE BEZ OPAKOVANIA
KOMBINAČNÉ ČÍSLO
BINOMICKÁ VETA
(ZHRNUTIE)

ZUZANA BARTOŠOVÁ

KOMBINÁCIE BEZ OPAKOVANIA

$C_k(n)$ **počet všetkých kombinácií k- tej triedy z n prvkov**

$$k \in N_0 \qquad n \in N_0 \qquad k \leq n$$

Kombinácia k-tej triedy z n prvkov bez opakovania je každá k-prvková podmnožina, zostavená len z týchto n prvkov tak, že každý sa v nej vyskytuje najviac raz.

Počet kombinácií $C_k(n)$:

$$C_k(n) = \frac{V_k(n)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!}$$

Príklad:

V obchode majú 12 druhov pohľadníc. Koľkými spôsobmi môžeme kúpiť 4 rôzne pohľadnice, ak na poradí, v akom ich kupujeme, nezáleží?

$$p = C_4(12) = \frac{V_4(12)}{4!} = \frac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 495$$

Všetky usporiadané štvorice, obsahujúce tie isté pohľadnice, „splynú“ do jednej kombinácie .

Pohľadnice môžeme kúpiť 495 spôsobmi.

(Maturita 2005)

KOMBINAČNÉ ČÍSLO

$k \in N_0, n \in N_0$

$$C_k(n) = \frac{V_k(n)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot k!} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$$

Kombinačné číslo

„en nad ká“

Vypočítajte:

$$\binom{8}{5} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4}{5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5} \cdot \cancel{4}}{\cancel{5} \cdot \cancel{4} \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{2} \cdot 1} = 8 \cdot 7 = 56$$

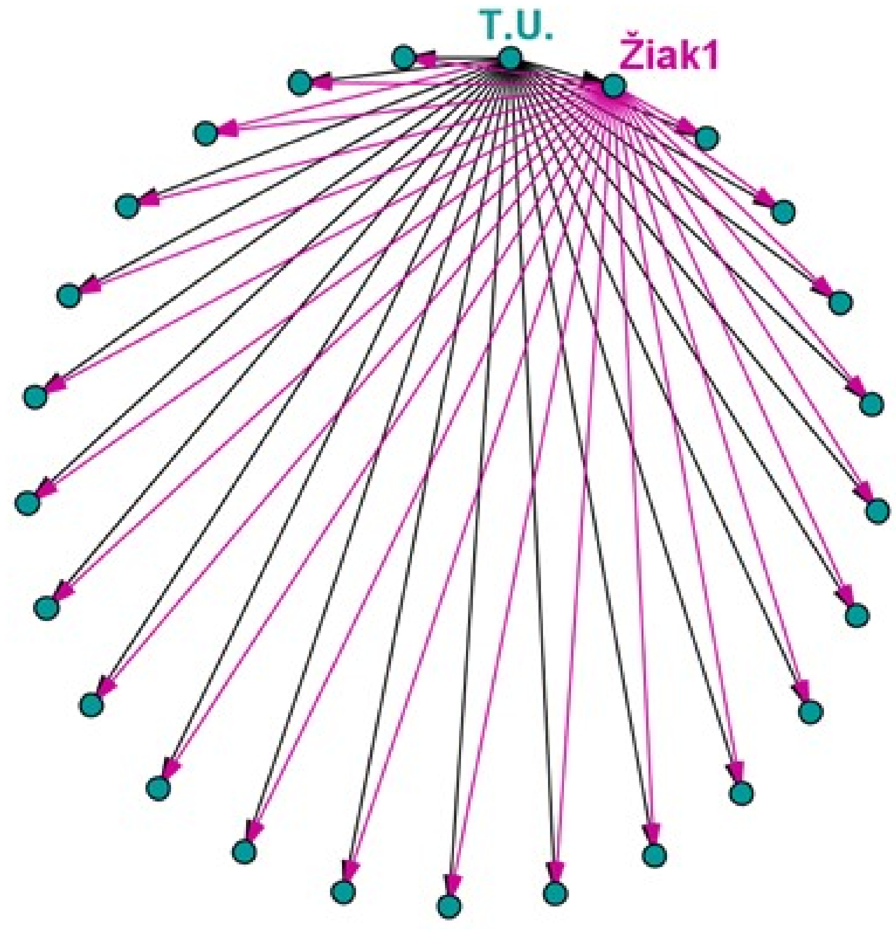
(cez variácie)

$$\binom{8}{5} = \frac{8!}{(8-5)! \cdot 5!} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot \cancel{6} \cdot \cancel{5!}}{\cancel{3!} \cdot \cancel{5!}} = 56$$

(pomocou vzorca s faktoriálmi)

Príklad:
V tomto školskom roku sa stužkovej slávnosti zúčastní len triedna učiteľka a 24 žiakov 4.D. Vypočítajte, koľko štrngnutí sa spolu ozve, ak si štrngne každý s každým raz a žiadne štrngnutia nesplynú.

Poradili by sme si aj bez kombinácií:



$$p = 24 + 23 + 22 + \cdots + 1$$

$$p = 300$$

Spolu sa ozve 300 štrngnutí.

A teraz pomocou kombinácií:

Vyberáme dvoch z 25: $p = C_2(25) =$

$$= \frac{25 \cdot 24}{2!} = 300$$ (cez variácie)

$$= \binom{25}{2} =$$

$$= \frac{25!}{(25-2)! \cdot 2!} = \frac{25!}{23! \cdot 2!} = 300$$

(pomocou vzorca s faktoriálmi)

Spolu sa ozve 300 štrngnutí.

VLASTNOSTI KOMBINAČNÝCH ČÍSEL:

$$\forall n \in N_0 \colon \binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\forall n \in N \colon \binom{n}{1} = n$$

$$\forall n \in N_0, k \in N_0, k \leq n \colon \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

Príklad: Vyjadrite jedným kombinačným číslom

a. $\binom{15}{7} + \binom{15}{9}$

b. $\binom{11}{2} + \binom{11}{3} + \binom{12}{2}$

$$\binom{15}{7} + \binom{15}{9} = \binom{15}{15-7} + \binom{15}{9} = \binom{15}{8} + \binom{15}{9} = \binom{16}{9}$$

$$\binom{11}{2} + \binom{11}{3} + \binom{12}{2} = \binom{12}{3} + \binom{12}{2} = \binom{13}{3}$$

PASCALOV TROJUHOLNÍK- schéma pre kombinačné čísla

$$\binom{n}{k}, n \in N_0, k \in N_0, k \le n$$

$$\boldsymbol{n = 0} \qquad \overset{1}{\binom{0}{0}}$$

$$\boldsymbol{n = 1} \qquad \overset{1}{\binom{1}{0}} \quad \overset{1}{\binom{1}{1}}$$

$$\boldsymbol{n = 2} \qquad \overset{1}{\binom{2}{0}} \quad \overset{2}{\binom{2}{1}} \quad \overset{1}{\binom{2}{2}}$$

$$\boldsymbol{n = 3} \qquad \overset{1}{\binom{3}{0}} \quad \overset{3}{\binom{3}{1}} \quad \overset{3}{\binom{3}{2}} \quad \overset{1}{\binom{3}{3}}$$

$$\boldsymbol{n = 4} \qquad \overset{1}{\binom{4}{0}} \quad \overset{4}{\binom{4}{1}} \quad \overset{6}{\binom{4}{2}} \quad \overset{4}{\binom{4}{3}} \quad \overset{1}{\binom{4}{4}}$$

$$\boldsymbol{n = 5} \qquad \overset{1}{\binom{5}{0}} \quad \overset{5}{\binom{5}{1}} \quad \overset{10}{\binom{5}{2}} \quad \overset{10}{\binom{5}{3}} \quad \overset{5}{\binom{5}{4}} \quad \overset{1}{\binom{5}{5}}$$

$$\boldsymbol{n = 6} \qquad \overset{1}{\binom{6}{0}} \quad \overset{6}{\binom{6}{1}} \quad \overset{15}{\binom{6}{2}} \quad \overset{20}{\binom{6}{3}} \quad \overset{15}{\binom{6}{4}} \quad \overset{6}{\binom{6}{5}} \quad \overset{1}{\binom{6}{6}}$$

Sledujte **súčet** čísel v každom riadku Pascalovho trojuholníka:

$n=0$							1							1
$n=1$						1		1						2
$n=2$					1		2		1					4
$n=3$				1		3		3		1				8
$n=4$			1		4		6		4		1			16
$n=5$		1		5		10		10		5		1		32
$n=6$	1		6		15		20		15		6		1	64

Súčet čísel v n- tom riadku je 2^n $(n \in N_0)$.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n}$$

Pascalov trojuholník = ťahák pri umocňovaní dvojčlena $(a+b)^n, a \in R, b \in R$:

$n=0$	1	$(a+b)^0 = 1$
$n=1$	1 1	$(a+b)^1 = 1a + 1b$
$n=2$	1 2 1	$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$
$n=3$	1 3 3 1	$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$
$n=4$	1 4 6 4 1	

.
.
.

$$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4 =$$

$$= a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

Binomický rozvoj výrazu $(a+b)^4$

Kombinačné čísla- binomické koeficienty

BINOMICKÁ VETA

$$\forall \boldsymbol{a} \in \boldsymbol{R}, \boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}, \boldsymbol{n} \in \boldsymbol{N}:$$

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^{\boldsymbol{n}} = \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{0}} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}} + \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{1}} \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{n}-\boldsymbol{1}} \boldsymbol{b} + \ldots + \binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{b}^{\boldsymbol{n}}$$

Príklad: Vypočítajte $(x^2+y)^5$

$$(x^2+y)^5 =$$

$$= \binom{5}{0}(x^2)^5 + \binom{5}{1}(x^2)^4 y + \binom{5}{2}(x^2)^3 y^2 + \binom{5}{3}(x^2)^2 y^3 + \binom{5}{4} x^2 y^4 + \binom{5}{5} y^5$$

$$(x^2+y)^5 = x^{10} + 5x^8 y + 10x^6 y^2 + 10x^4 y^3 + 5x^2 y^4 + y^5$$

$$(a+b)^n = \underbrace{\binom{n}{0} a^n}_{A_1} + \underbrace{\binom{n}{1} a^{n-1} b}_{A_2} + \dots + \underbrace{\binom{n}{n} b^n}_{A_{n+1}}$$

A_k… k-ty člen binomického rozvoja

$$\boxed{A_k = \binom{n}{k-1} \cdot a^{n-(k-1)} \cdot b^{k-1}}$$

Príklad:

Vypočítajte siedmy člen binomického rozvoja výrazu $\left(2x^2 - \frac{1}{x}\right)^9$

$$A_7 = \binom{9}{6} \cdot (2x^2)^{9-6} \cdot \left(-\frac{1}{x}\right)^6 = 672$$