KOMPLEXNÉ ČÍSLA I.

(ZHRNUTIE)

ZUZANA BARTOŠOVÁ

Množinu všetkých komplexných čísel označujeme

$$\boldsymbol{C}$$

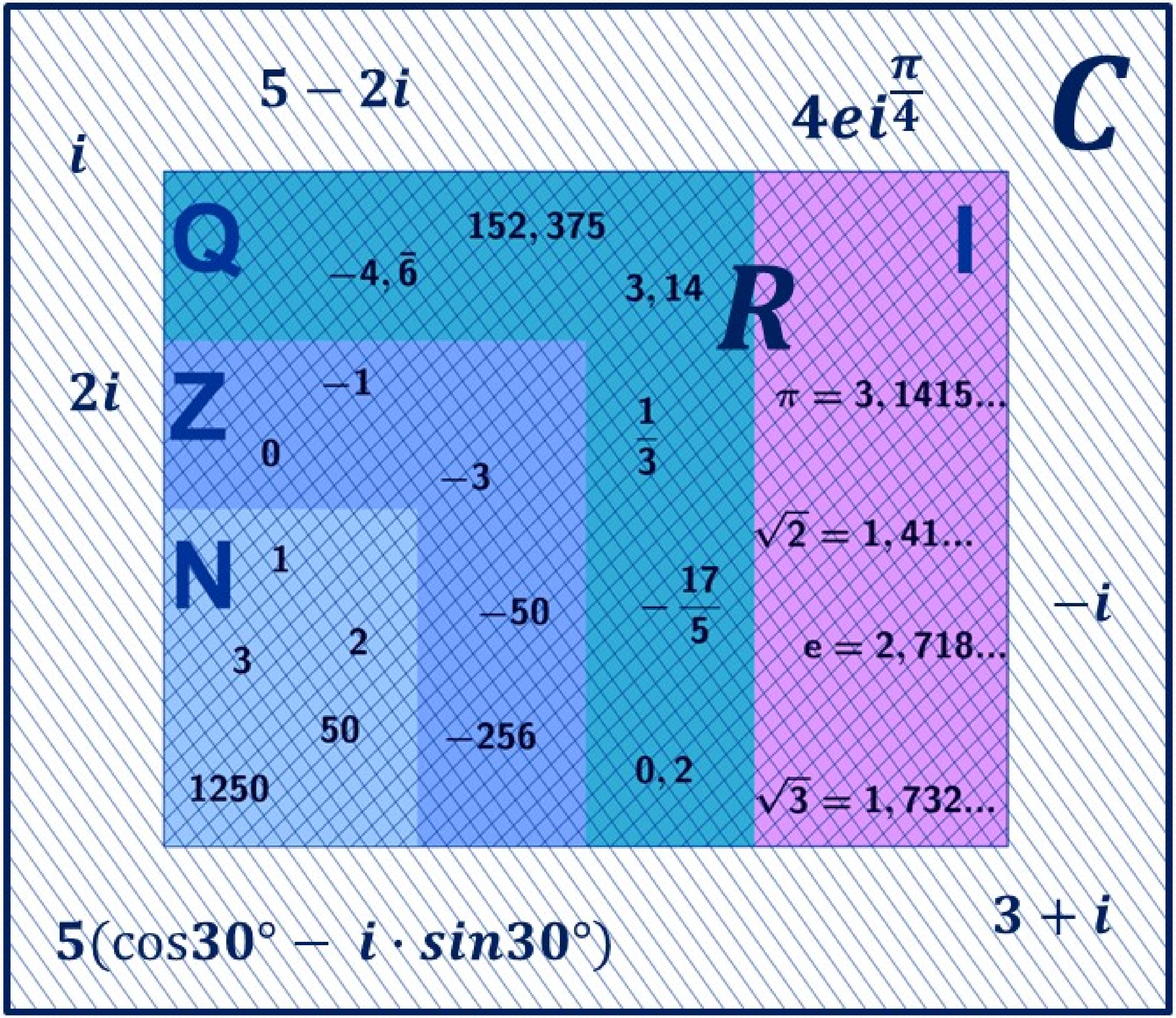
Rozšírenie množiny R → Množina všetkých **komplexných čísel $\boldsymbol{C}$**

Zavedenie (Leonard Euler) čísla $\boldsymbol{i}$ (**imaginárna jednotka**), pre ktoré platí

$$\boxed{\boldsymbol{i} = \sqrt{-1}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{i^2 = -1}}$$

V elektrotechnike sa používa $\boldsymbol{j}$ ($\boldsymbol{i}$ už je „obsadené“).

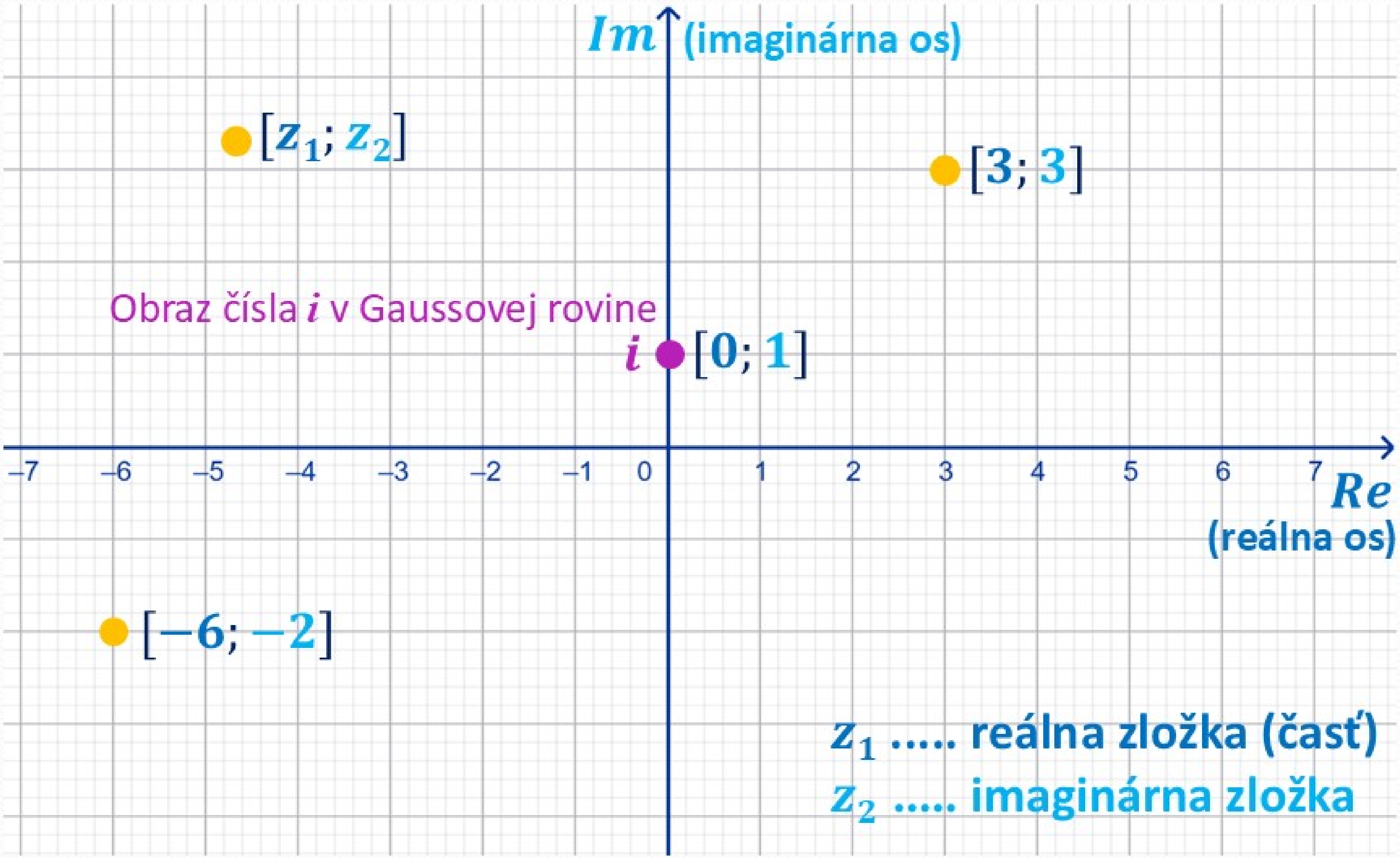


$N \subset Z \subset Q \subset R, I \subset R, Q \cup I = R$

$\boxed{R \subset C}$

Zobrazenie komplexných čísel

Komplexné čísla znázorňujeme bodmi v **Gaussovej rovine**.



Algebr(a)ický tvar komplexného čísla

$$\boxed{z = z_1 + z_2 \cdot i}$$

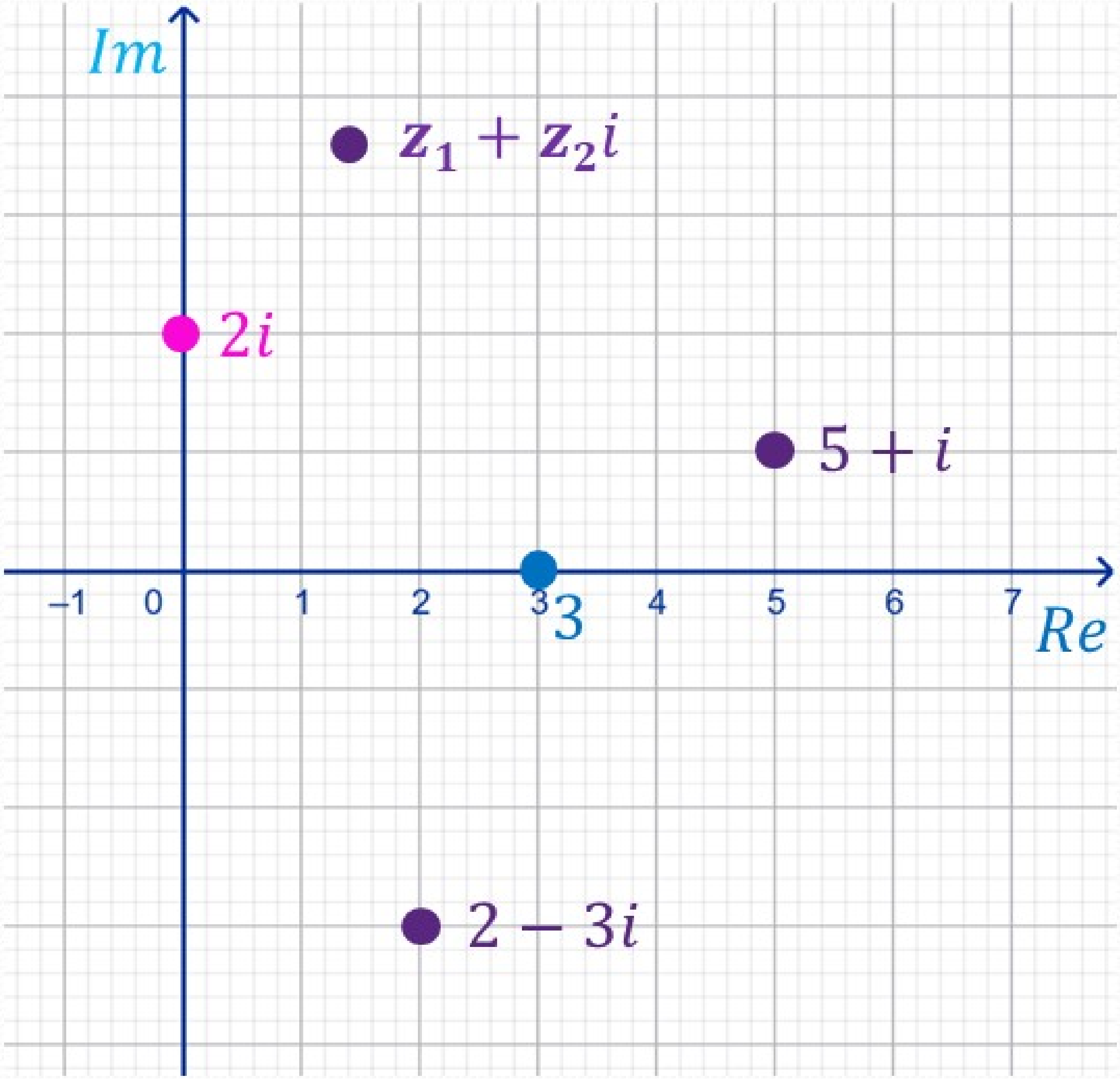
$z \in C$

$z_1 \in R, z_2 \in R$

reálna zložka

imaginárna zložka

imaginárna jednotka



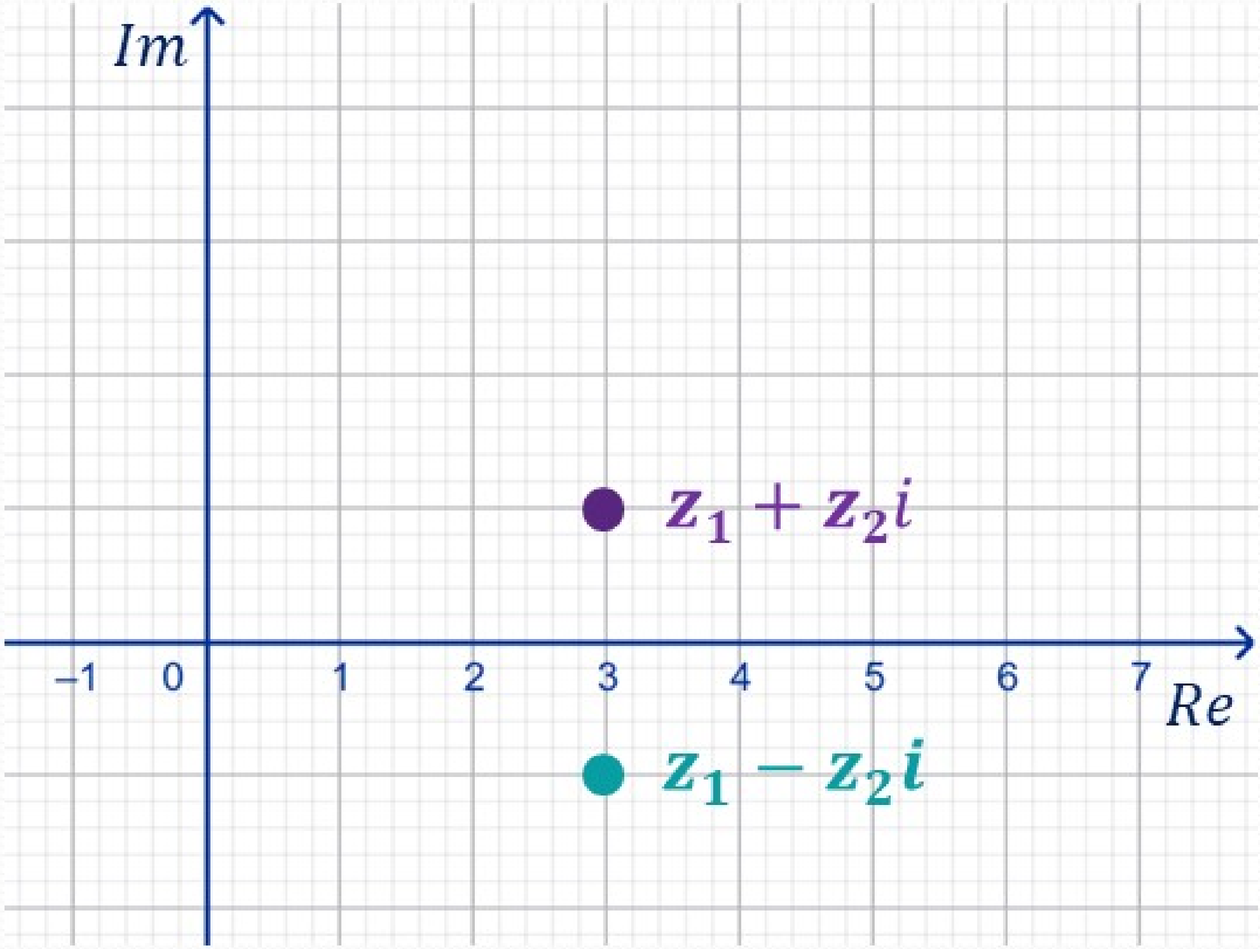
Komlexné čísla:

- imaginárne
  (obe zložky nenulové)
- rýdzoimaginárne
  (reálna zložka nulová)
- reálne
  (imaginárna zložka nulová)

Komplexne združené čísla

$$\mathbf{z} = \mathbf{z_1} + \mathbf{z_2}i$$

$$\overline{\mathbf{z}} = \mathbf{z_1} - \mathbf{z_2}i$$



Príklad:

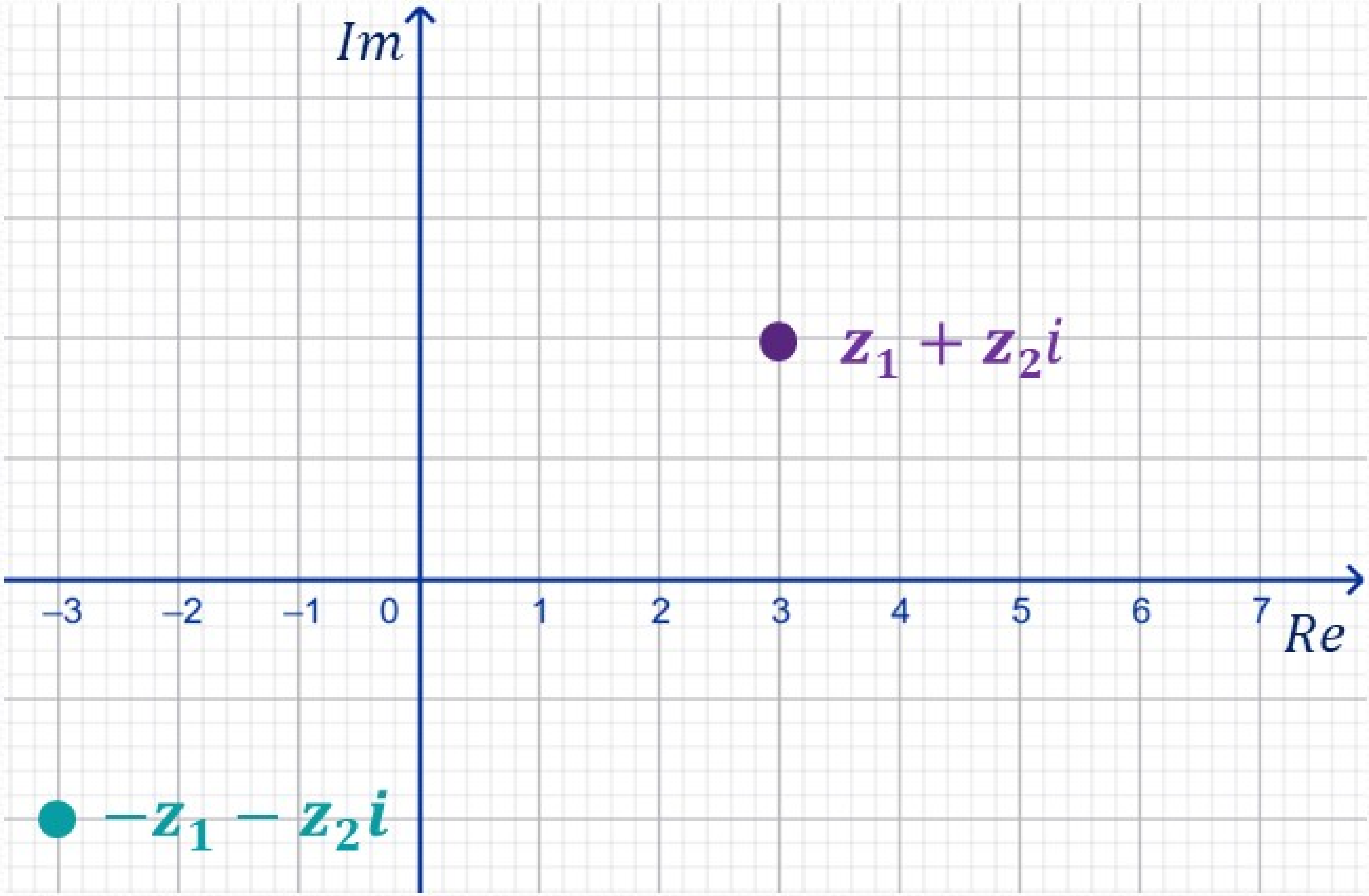
$$z = 3 + i$$

$$\bar{z} = 3 - i$$

$$\bar{\bar{z}} = 3 + i$$

Komplexne združené číslo $\overline{\mathbf{z}}$ (čítame „z s pruhom“) k danému číslu $\mathbf{z}$ má rovnakú reálnu a opačnú imaginárnu zložku.
Obrazy komplexne združených čísel sú súmerné podľa reálnej osi.

Opačné čísla



$$z = z_1 + z_2 i$$

$$-z = -z_1 - z_2 i$$

Príklad:

$$z = 3 + 2i$$

$$-z = -3 - 2i$$

Opačné číslo k danému číslu z je číslo $-z$, má opačnú reálnu a opačnú imaginárnu zložku.
Obrazy opačných čísel sú stredovo súmerné podľa začiatku súradnicovej sústavy.

Rovnosť komplexných čísel

Nech $a = a_1 + a_2 i,\ b = b_1 + b_2 i$, potom

$$\boxed{\boldsymbol{a = b \Leftrightarrow (a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2)}}$$

$$(a \in C, b \in C, a_1 \in R, a_2 \in R, b_1 \in R, b_2 \in R)$$

Dve komplexné čísla sa rovnajú práve vtedy, keď sa rovnajú ich reálne a aj imaginárne zložky.

Príklad:

Určte reálne čísla $x, y,$ ak platí $2x - 3i = 1 + yi$

Reálne zložky: $2x = 1$

Imaginárne zložky: $-3 = y$

$$x = \frac{1}{2} \quad \wedge \ y = -3$$

Operácie s komplexnými číslami

Nech $a = a_1 + a_2 i,\ b = b_1 + b_2 i$, potom

Súčet komplexných čísel

$$\boldsymbol{a + b = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)i}$$

Príklad: $3 + i + 2 + 3i = 5 + 4i$

Rozdiel komplexných čísel

$$\boldsymbol{a - b = a + (-b) = (a_1 - b_1) + (a_2 - b_2)i}$$

Príklad: $5 + 2i - (2 + 3i) = 5 + 2i - 2 - 3i = 3 - i$

Súčin komplexných čísel $\boldsymbol{a \cdot b = (a_1 + a_2 i) \cdot (b_1 + b_2 i)}$

"Roznásobiť zátvorky" - dvojčlen dvojčlenom

Príklad:

$\boldsymbol{i^2 = -1}$

$$(2+3i)\cdot(1+i) = 2 + 2i + 3i + 3i^2 = 2 + 5i - 3 = -1 + 5i$$

Podiel komplexných čísel $\boldsymbol{\frac{a}{b} = \frac{a}{b} \cdot \frac{\overline{b}}{\overline{b}}}$ $\quad b \in C - \{0\}$

Rozšírenie zlomku komplexne združeným číslom k číslu v menovateli $\rightarrow$ reálne číslo v menovateli

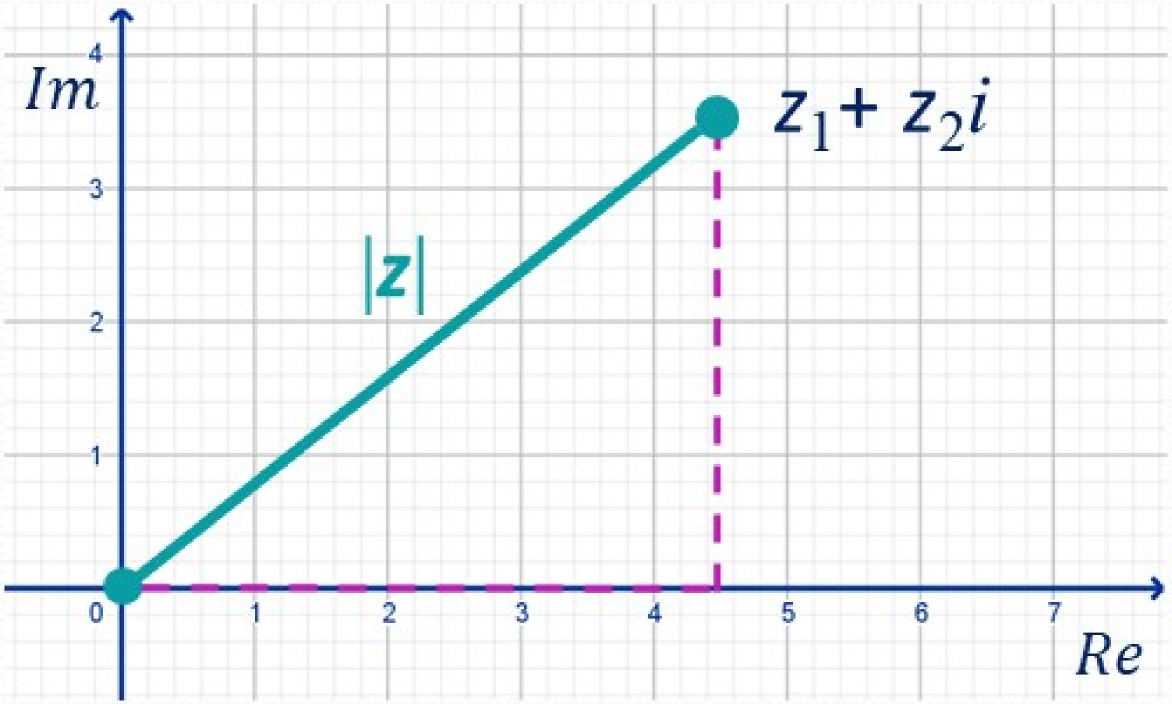
Príklad:

$$\frac{4+2i}{3-2i} = \frac{4+2i}{3-2i}\cdot\frac{3+2i}{3+2i} = \frac{12+8i+6i+4i^2}{9-(2i)^2} =$$

$$= \frac{12+14i-4}{9+4} = \frac{8+14i}{13} = \frac{8}{13} + \frac{14}{13}i$$

Absolútna hodnota (veľkosť) komplexného čísla

$$z = z_1 + z_2 i, z_1 \in R, z_2 \in R$$



$|\boldsymbol{z}|$

je vzdialenosť obrazu čísla $\boldsymbol{z}$ od začiatku súradnicovej sústavy v Gaussovej rovine

$$|z| = \sqrt{z_1^2 + z_2^2}$$

Príklad: $z = 4 - 3i$

$$|z| = \sqrt{4^2 + (-3)^2}$$

$$|z| = 5$$

Každé komplexné číslo, ktorého absolútna hodnota sa rovná 1,

sa nazýva **komplexná jednotka**.