GEOMETRICKÁ POSTUPNOSŤ
(ZHRNUTIE)

ZUZANA BARTOŠOVÁ

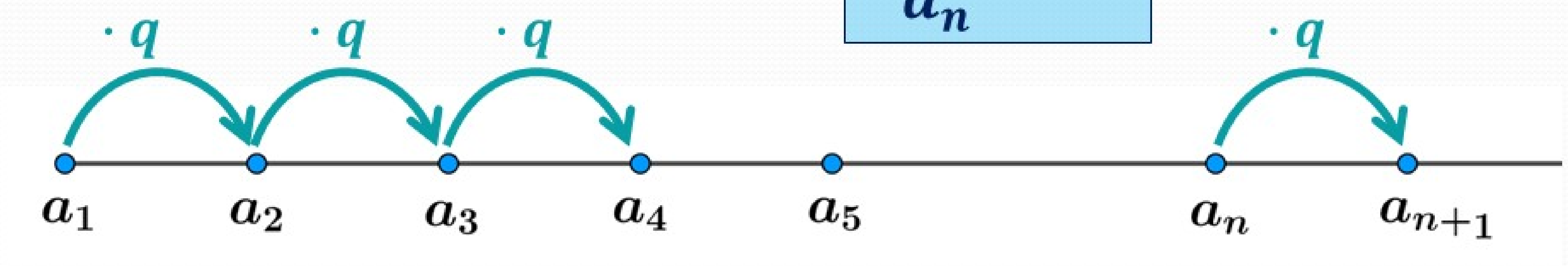
GEOMETRICKÁ POSTUPNOSŤ

Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva geometrická práve vtedy, ak $\exists\ q \in$ R, že $\forall\ n \in$ N platí :

$$\boxed{a_{n+1} = a_n \cdot q}$$

Podiel každých dvoch po sebe idúcich členov je konštantný:

$$\boxed{\frac{a_{n+1}}{a_n} = q}$$



číslo ***q*** sa nazýva **kvocient** geometrickej postupnosti

V geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s kvocientom $q \in R$,

$\forall n \in N$ platí: $\boxed{\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}}$

$\forall r \in N, s \in N$ platí: $\boxed{\boldsymbol{a_s = a_r \cdot q^{s-r}}}$

Pre súčet prvých $\boldsymbol{n}$ členov geometrickej postupnosti platí:

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n$$

$\boldsymbol{q = 1}$

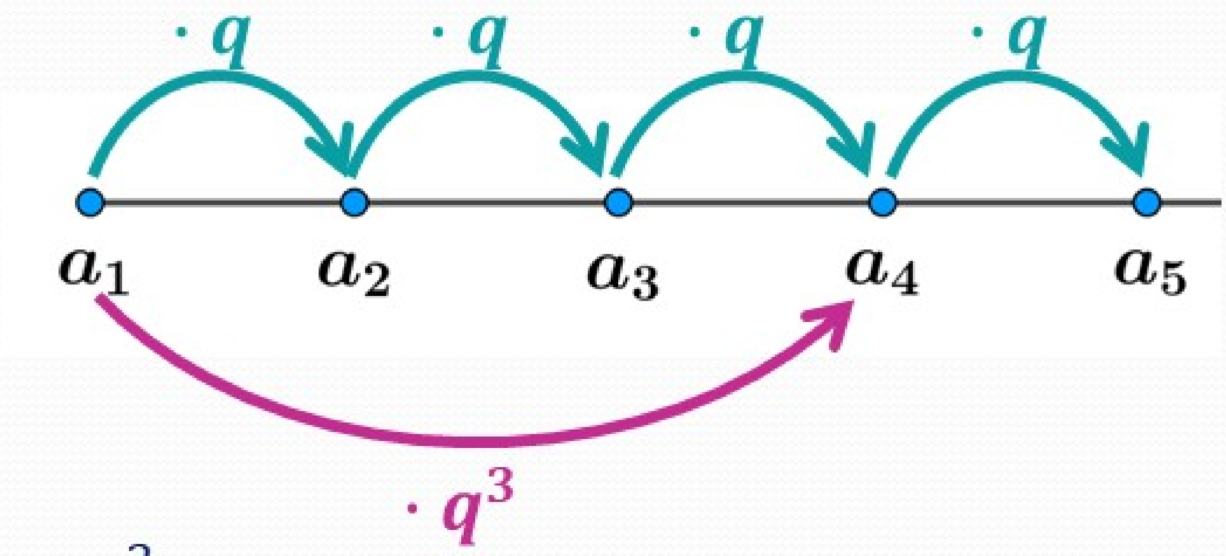
$$\boxed{\boldsymbol{s_n = n \cdot a_1}}$$

$\boldsymbol{q \neq 1}$

$$\boxed{\boldsymbol{s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}}}$$

(Dôkazy nájdete v učebnici 6, na strane 25.)

Príklad: Prvý člen geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je $a_1 = -\frac{1}{2}$, jej štvrtý člen je $a_4 = 32$. Vypočítajte jej piaty člen.



$$a_4 = a_1 \cdot q^3$$

$$q^3 = \frac{a_4}{a_1}$$

$$q^3 = -64$$

$$q = -4$$

$$a_5 = a_4 \cdot q$$

$$a_5 = -128$$

Piaty člen je -128.

Príklad: Určte geometrickú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, v ktorej platí:

$a_3 = 9, a_5 = 81.$

(Určiť geometrickú postupnosť znamená nájsť $a_1, q.$)

$$a_5 = a_3 \cdot q^2$$

$$q^2 = \frac{a_5}{a_3}$$

$$q^2 = 9$$

$$q = \pm 3$$

$$a_3 = a_1 \cdot q^2$$

$$a_1 = \frac{a_3}{q^2}$$

$$q = 3 \Rightarrow a_1 = 1$$

$$q = -3 \Rightarrow a_1 = 1$$

$$a\colon\ a_1 = 1, q = 3$$

$$a'\colon\ a_1 = 1, q = -3$$

Príklad:

Zistite, či je postupnosť $\{3^{1-n}\}_{n=1}^{4}$ geometrická.

Daná postupnosť je konečná, vypíšeme všetky členy postupnosti:

$$a_1 = 3^{1-1} = 1, a_2 = 3^{1-2} = 3^{-1} = \frac{1}{3}, a_3 = 3^{-2} = \frac{1}{9}, a_4 = \frac{1}{27}$$

Určíme podiel po sebe idúcich členov:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{3} \qquad \frac{a_3}{a_2} = \frac{1}{3} \qquad \frac{a_4}{a_3} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \frac{a_4}{a_3} = \frac{1}{3}$$

Podiel po sebe idúcich členov postupnosti je $\frac{1}{3}$ (konštanta),

daná postupnosť je geometrická, $q = \frac{1}{3}$.

Príklad:

Dokážte, že postupnosť $\{2^n\}_{n=1}^{\infty}$ je geometrická.

Vypíšeme prvé členy nekonečnej postupnosti: $2; 4; 8; 16; \ldots$

Predpoklad: postupnosť je geometrická, s kvocientom $q = 2$

Dôkaz: určíme podiel $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ $, \forall\, n \in N$

$$a_n = 2^n \qquad\qquad a_{n+1} = 2^{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2^{n+1}}{2^n} = 2^{n+1-n} = 2$$

Podiel po sebe idúcich členov postupnosti je 2 (konštanta),

daná postupnosť je geometrická, $q = 2$.

Príklad: Určte geometrickú postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, v ktorej platí:

$$a_1 + a_3 = 5$$
$$a_2 + a_4 = 10$$

(Sústava dvoch rovníc s dvomi neznámymi. Na jej vyriešenie môžete použiť aj dosadzovaciu metódu, tu: porovnávacia metóda.)

$$a_1 + a_1 \cdot q^2 = 5$$
$$a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^3 = 10$$

$$a_1 \cdot (1 + q^2) = 5 \quad \Rightarrow a_1 = \frac{5}{1+q^2}$$

$$a_1 \cdot (q + q^3) = 10 \quad \Rightarrow a_1 = \frac{10}{q+q^3}$$

$$\frac{5}{1+q^2} = \frac{10}{q \cdot (1+q^2)}$$

$$5 \cdot q = 10$$

$$q = 2$$

$$a_1 = \frac{5}{1+2^2}$$

$$a_1 = 1$$

$$a\colon\ a_1 = 1, q = 2$$

Príklad: Určte koľko prvých členov geometrickej postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dáva súčet 511, ak je dané: $a_1 = 1, q = 2$.

$$s_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \qquad n = ?$$

$$511 = 1 \cdot \frac{2^n - 1}{2 - 1}$$

$$511 = 2^n - 1$$

$$512 = 2^n$$

$$2^9 = 2^n$$

$$n = 9$$

Súčet 511 dáva 9 členov danej postupnosti.

Príklad: Na začiatku pokusu je vo vzorke 100 baktérií. Po uplynutí 24 hodín sa počet baktérií vo vzorke vždy zdvojnásobí. Pre jednoduchosť predpokladáme, že do konca pokusu ani jedna baktéria nezahynie. Určte, po koľkých dňoch bude vo vzorke 25 600 baktérií.

Počet baktérií na začiatku: 100

Počet po 1. dni: $200 = 2 \cdot 100 = a_1$

$q = 2$

Počet po 2. dni: $400 = 2 \cdot 200 = a_2$

Počet po n- tom dni : $a_n = a_1 \cdot q^{n-1} = 25\,600$

$$200 \cdot 2^{n-1} = 25\,600$$

$$200 \cdot \frac{2^n}{2} = 25\,600$$

$$2^n = 256$$

$$n = 8$$

Vo vzorke bude 25 600 baktérií po ôsmych dňoch.

(Maturita 2014)

Predchádzajúci príklad ste možno vyriešili „kalkulačkovou metódou“, čo je v poriadku. Ak by sme však chceli zistiť, po koľkých dňoch bude vo vzorke (teoreticky) napr. $1{,}15 \cdot 10^{20}$ baktérií ...