PERMUTÁCIE

(ZHRNUTIE)

ZUZANA BARTOŠOVÁ

PERMUTÁCIE BEZ OPAKOVANIA

$\boldsymbol{P(n)}$ **počet všetkých permutácií $\boldsymbol{n}$ prvkov** $\boldsymbol{n \in N}$

$$\boldsymbol{P(n) = V_n(n)}$$

Definícia:
Permutácie n prvkov bez opakovania sú variácie n-tej triedy z n prvkov (usporiadané n- tice z n prvkovej množiny).

Počet permutácií $\boldsymbol{P(n)}$:

$\underline{\boldsymbol{n}}$ $\underline{\boldsymbol{n-1}}$ $\underline{\boldsymbol{n-2}}$ …….. $\underline{\boldsymbol{1}}$

$$\boldsymbol{P(n) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!}$$

$$\underbrace{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots 3 \cdot 2 \cdot 1}_{n!}$$

n faktoriál (súčin prvých n prirodzených čísel)

Príklad:

Pomocou definície faktoriálu vypočítajte $1!, 3!, 4!, 6!$.

$$1! = 1$$
$$3! = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$$
$$4! = 4 \cdot 3! = 24$$
$$6! = 6 \cdot 5 \cdot 4! = 720$$

$$\boxed{0! = 1}$$

$$n!$$
$$n \in N_0$$

Príklad: V lavici sedí 5 žiakov- Adam, Braňo, Cyril, Dušan a Emil. Koľkými spôsobmi ich môžeme posadiť tak, aby Adam a Braňo sedeli vedľa seba?

A	B	3	2	1
3	A	B	2	1
3	2	A	B	1
3	2	1	A	B

$$p = 2 \cdot 4 \cdot 3! = 2 \cdot 4! = 2 \cdot P(4) = 2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$$

$[A; B] \leftrightarrow [B; A]$

Chlapcov môžeme v lavici posadiť 48 spôsobmi tak, aby A a B sedeli vedľa seba.

Príklad: Vypočítajte (bez použitia kalkulačky) $\frac{28!+29!}{30!}$

$$\frac{28!+29!}{30!}=\frac{28!+29\cdot 28!}{30!}=\frac{28!\cdot(1+29)}{30\cdot 29\cdot 28!}=\frac{28!\cdot 30}{30\cdot 29\cdot 28!}=\frac{1}{29}$$

Príklad: Zjednodušte $\frac{(n-2)!}{(n-4)!}$

$n\in N\wedge n\geq 4$

$n\in\{4;5;6;\dots\}$

$$\frac{(n-2)!}{(n-4)!}=\frac{(n-2)\cdot(n-3)\cdot(n-4)!}{(n-4)!}=n^2-5n+6$$

Príklad: Zjednodušte $\frac{(n+4)!}{(n+3)!}$

$n\in Z\wedge n\geq -3$

$n\in\{-3;-2;-1;0;1;\dots\}$

$$\frac{(n+4)!}{(n+3)!}=\frac{(n+4)\cdot(n+3)!}{(n+3)!}=n+4$$

Príklad: Zjednodušte výraz: $\frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}$ **;** $k \in N; n \in N; k \leq n$

$$\frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!} = \frac{\boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\cdot(\boldsymbol{n}-\mathbf{2})\ldots(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+\mathbf{1})\cdot(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!} =$$

$$= \boldsymbol{n}\cdot(\boldsymbol{n}-\mathbf{1})\cdot(\boldsymbol{n}-\mathbf{2})\ldots(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k}+\mathbf{1}) = \boldsymbol{V_k}(\boldsymbol{n})$$

$$\boxed{\boldsymbol{V_k}(\boldsymbol{n}) = \frac{\boldsymbol{n}!}{(\boldsymbol{n}-\boldsymbol{k})!}}$$

$$V_3(9) = \begin{cases} 9\cdot 8\cdot 7 \\ \frac{9!}{(9-3)!} \end{cases} = 504$$

Príklad: Riešte rovnicu $2 \cdot \frac{(x+1)!}{(x-1)!} = 9x - 3$

$$2 \cdot \frac{(x+1) \cdot x \cdot (x-1)!}{(x-1)!} = 9x - 3 \qquad x \in N$$

$$2 \cdot (x+1) \cdot x = 9x - 3$$

$$2x^2 + 2x = 9x - 3$$

$$2x^2 - 7x + 3 = 0$$

Kvadratickú rovnicu hravo vyriešite:

$$x_1 = 3 \qquad x_2 = \frac{1}{2}$$

$$P = \{3\}$$

PERMUTÁCIE S OPAKOVANÍM

Permutácia s opakovaním z $\boldsymbol{n}$ prvkov je usporiadaná $\boldsymbol{n}$-tica zostavená z m rôznych prvkov tak, že každý prvok sa v nej vyskytuje aspoň raz.
Počet permutácií s opakovaním z n prvkov, v ktorých sa jednotlivé prvky opakujú $k_1, k_2, \dots\ k_m$-krát, vyjadruje vzťah:

$$\boxed{\boldsymbol{P'(k_1, k_2, \dots, k_m) = \frac{(k_1 + k_2 + \ \dots + k_m)!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ \dots \cdot k_m!} = \frac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ \dots \cdot k_m!}}}$$

Poznámka: „Hráme sa“ v množine prirodzených čísel (N).

Príklad:

Koľko sedemciferných čísel sa dá napísať číslicami $5, 7, 8, 8, 1, 1, 1$?

Počet číslic: $n = 7$

Počet opakovaní: $k_1 = 3$ (jednotky)

$k_2 = 2$ (osmičky)

$k_3 = 1$ (päťka)

$k_4 = 1$ (sedmička)

$$P'(3,2,1,1) = \frac{7!}{3! \cdot 2! \cdot 1! \cdot 1!} = 420$$

Existuje 420 takých čísel.

Príklad: Koľko permutácií s opakovaním možno vytvoriť z písmen slova MATEMATIKA.

Počet písmen 10

A 3x

M 2x

T 2x

E 1x

I 1x

K 1x

MATEMATIKA

$$P'(3,2,2,1,1,1) = \frac{10!}{3! \cdot 2! \cdot 2!} = 151\,200$$

Existuje 151 200 takých „slov“.