POSTUPNOSTI

(ZHRNUTIE)

ZUZANA BARTOŠOVÁ

Postupnosť je funkcia, ktorej definičným oborom je množina všetkých prirodzených čísel alebo jej podmnožina typu $\{1;\ 2;\ 3;\ \dots\ k\}$.

Nekonečná postupnosť

Napr.: $\underbrace{\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \dots}$

Konečná postupnosť

Napr.: $\underbrace{2; 4; 6; 8}$

Členy postupnosti

prvý člen $a_1 = \frac{1}{2}$

druhý člen $a_2 = \frac{1}{4}$

...

n- tý člen $a_n = 2^{-n}$

$n \in$ N

prvý člen $a_1 = 2$

druhý člen $a_2 = 4$

tretí člen $a_3 = 6$

štvrtý člen $a_4 = 8$

Určenie postupnosti

tabuľkou

vypísaním členov

predpisom pre n-tý člen

grafom

rekurentne

- **tabuľka**

n	1	2	3	4	...
a_n	2	4	6	8	...

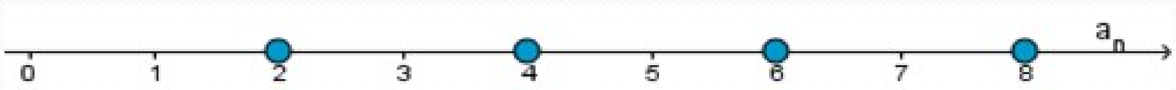
- **vypísanie členov** a: 2; 4; 6; 8...

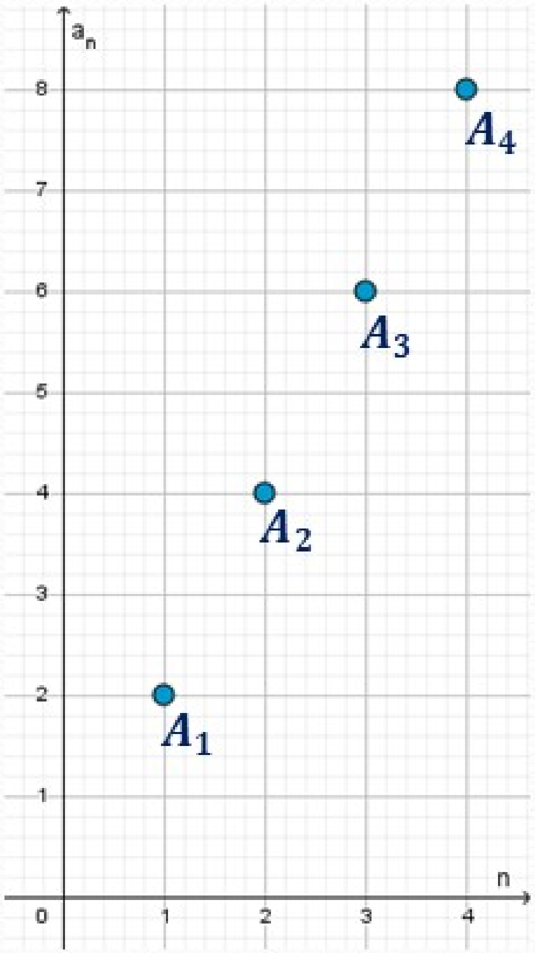
  a: $a_1 = 2$; $a_2 = 4$; $a_3 = 6$; $a_4 = 8$ ...

- **predpis** pre n-tý člen $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$

  $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$ (nekonečná postupnosť) $\{2n\}_{n=1}^{4}$ (konečná postupnosť)

- **rekurentný vzorec**
- **graf** (grafom je množina izolovaných bodov)
  - v súradnicovej sústave
  - na číselnej osi





Príklad: Určte členy postupnosti $\{7n-5\}_{n=1}^{4}$

$$a_n = 7 \cdot n - 5$$

$$a_1 = 7 \cdot 1 - 5 = 2$$

$$a_2 = 7 \cdot 2 - 5 = 9$$

$$a_3 = 7 \cdot 3 - 5 = 16$$

$$a_4 = 7 \cdot 4 - 5 = 23$$

a: 2; 9; 16; 23

Príklad: Určte predpis pre n- tý člen postupnosti

$$\frac{1}{3}; \frac{2}{9}; \frac{3}{27}; \frac{4}{81}; \frac{5}{243}; \frac{6}{729}; \dots$$

$$a_n = \frac{n}{3^n} \qquad \left\{\frac{n}{3^n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

Rekurentne definovaná postupnosť

$$\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$$

Postupnosť určená vzťahom pre výpočet členov postupnosti pomocou jedného alebo viacerých predchádzajúcich členov (rekurentný vzorec).

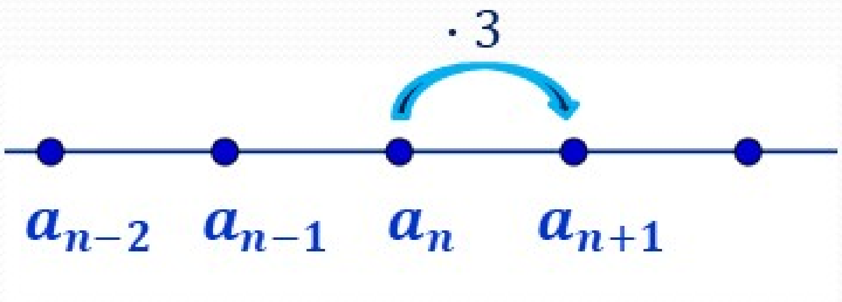
Nevýhoda: pri výpočte hodnoty ľubovoľného člena postupnosti je potrebné určiť všetky predchádzajúce členy.

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad a_{n-2} \quad a_{n-1} \quad a_n \quad a_{n+1} \quad a_{n+2}$$

Príklad: Napíšte prvých 5 členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, pre ktorú platí

$$a_1 = 2, a_{n+1} = 3a_n$$

$$a_{n+1} = 3 \cdot a_n$$



(Každý člen je trojnásobkom predchádzajúceho člena.)

$$a_2 = 3a_1 = 3 \cdot 2 = 6$$

$$a_3 = 3a_2 = 3 \cdot 6 = 18$$

$$a_4 = 3a_3 = 3 \cdot 18 = 54$$

$$a_5 = 3a_4 = 3 \cdot 54 = 162$$

a: 2; 6; 18; 54; 162

Vlastnosti postupnosti

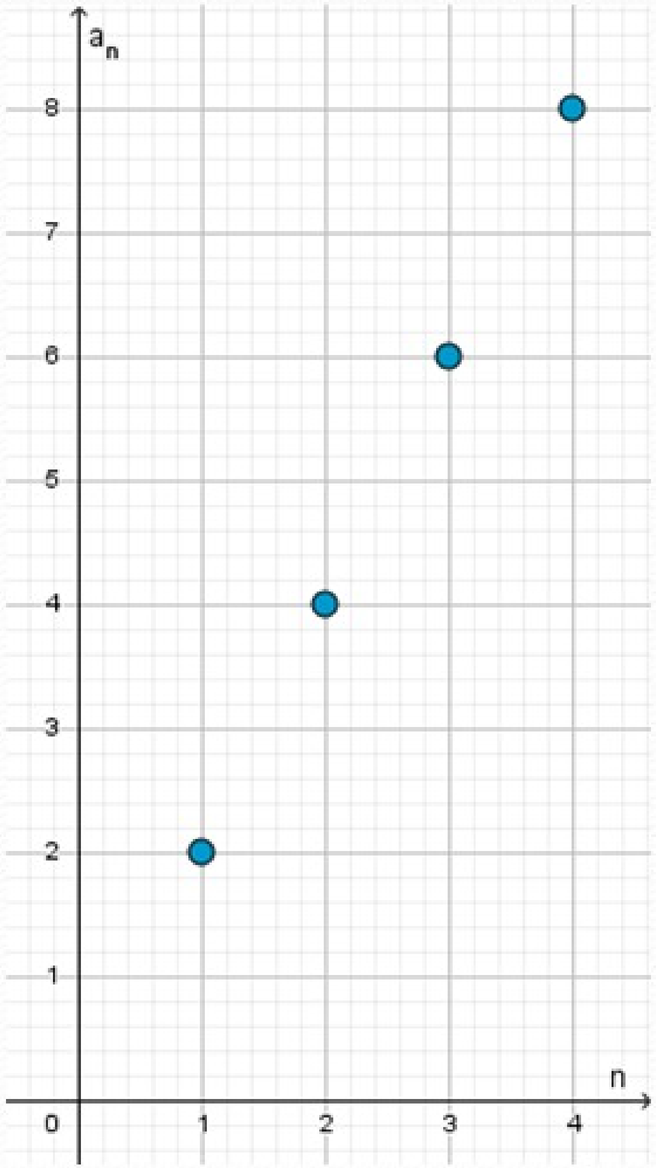
Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva

- **rastúca**, ak $\forall n \in N$: $a_{n+1} > a_n$ ……………… $a_{n+1} - a_n > 0$
- **klesajúca**, ak $\forall n \in N$: $a_{n+1} < a_n$ ……………… $a_{n+1} - a_n < 0$
- **nerastúca**, ak $\forall n \in N$: $a_{n+1} \leq a_n$
- **neklesajúca**, ak $\forall n \in N$: $a_{n+1} \geq a_n$

Takéto postupnosti nazývame **monotónne.**

Príklad:

Vypíšte členy postupnosti a zistite, či je rastúca alebo klesajúca.



$a: 2; 4; 6; 8$

Postupnosť je rastúca.

$$a_1 < a_2 < a_3 < a_4$$

Rozdiel po sebe idúcich členov $a_{n+1} - a_n$; $n \in \{1; 2; 3; 4\}$ je

<u>kladné</u> číslo.

$$\left\{\frac{5-3n}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

$$a_1 = \frac{5-3\cdot 1}{1} = 2$$

$$a_2 = \frac{5-3\cdot 2}{2} = -\frac{1}{2}$$

$$a_3 = \frac{5-3\cdot 3}{3} = -\frac{4}{3}$$

$$a_4 = \frac{5-3\cdot 4}{4} = -\frac{7}{4}$$

$$a_5 = \frac{5-3\cdot 5}{5} = -2$$

Predpoklad:
Postupnosť je klesajúca.

$$a_1 > a_2 > a_3 > a_4 \dots$$

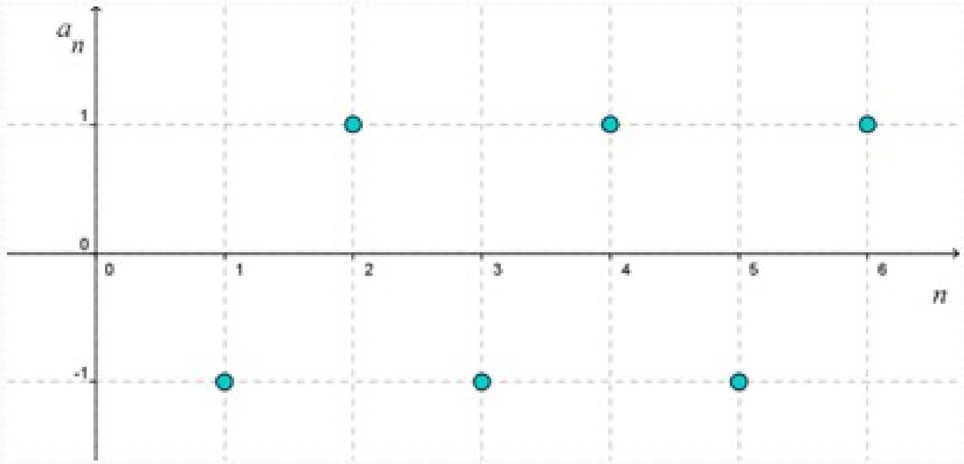
Rozdiel po sebe idúcich členov $a_{n+1} - a_n$; $n \in N$, je **záporné** číslo.

$$\{-4\}_{n=1}^{\infty}$$

$$a_1 = a_2 = a_3 = a_4 \dots = -4$$

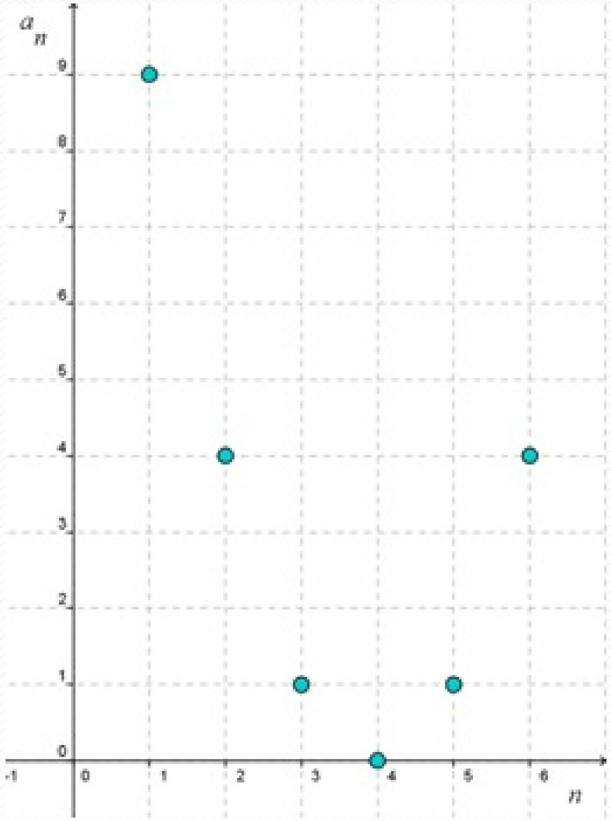
Postupnosť sa nazýva konštantná a je nerastúca, neklesajúca.

$a_1 = -1;\ a_{n+1} = -1 \cdot a_n; n \in N$



a: $-1; 1; -1; 1; -1; 1; \ldots$

Postupnosť osciluje,
nie je monotónna.



$\{(n-4)^2\}_{n=1}^{\infty}$

a: $9; 4; 1; 0; 1; 4; \ldots$

Postupnosť nie je monotónna.

Príklad:

Rozhodnite, či je postupnosť $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$ rastúca, alebo klesajúca. Svoje tvrdenie dokážte.

Vypíšeme prvé členy postupnosti : $2; 4; 6; 8; \ldots$

Predpoklad: postupnosť je rastúca.

Dôkaz: určíme rozdiel $a_{n+1} - a_n;\ \forall\, n \in N$

$$a_n = 2 \cdot n \qquad\qquad a_{n+1} = 2 \cdot (n+1) = 2n + 2$$

$$a_{n+1} - a_n = 2n + 2 - 2n = 2 > 0$$

Daná postupnosť je rastúca.

Vlastnosti postupnosti

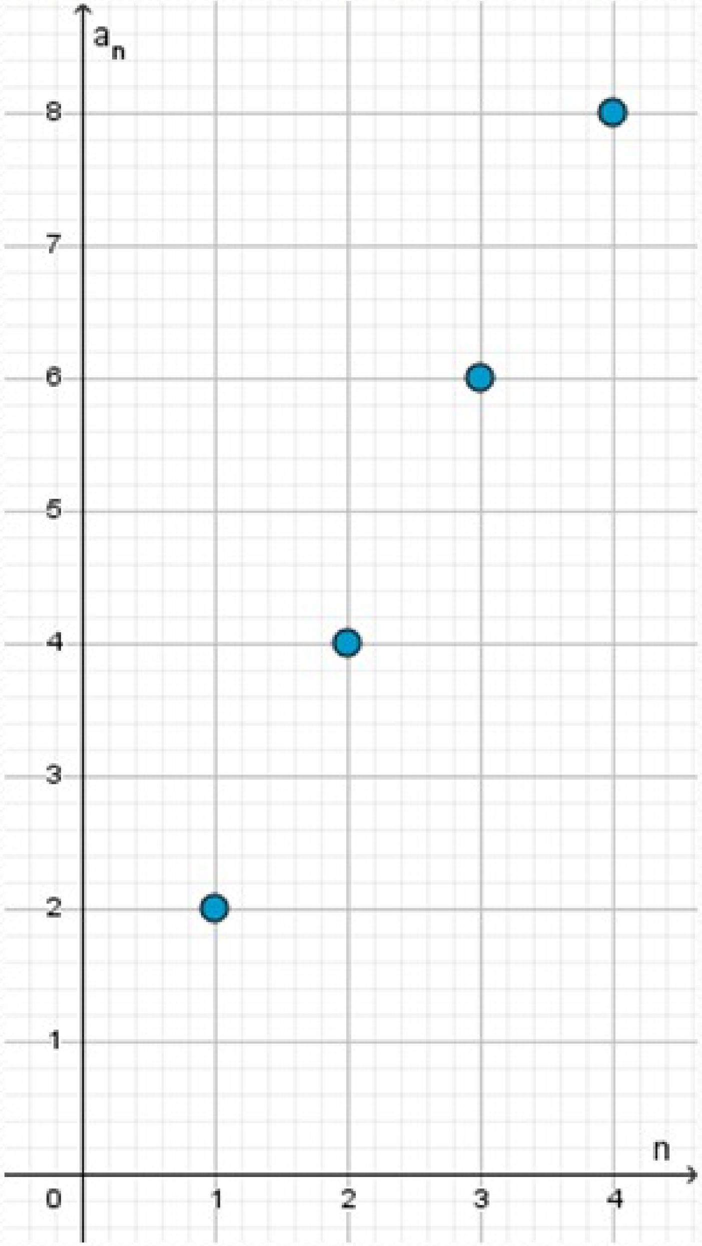
Postupnosť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ sa nazýva

- **zhora ohraničená**, ak $\exists\ h \in$ R, že $\forall\ n \in$ N platí : $a_n \leq h$
- **zdola ohraničená**, ak $\exists\ d \in$ R, že $\forall\ n \in$ N platí : $a_n \geq d$
- **ohraničená**, ak je ohraničená zhora a zároveň zdola

Poznámka:
Niektoré učebné materiály uvádzajú v príkladoch určenie d a h.
Majú na mysli najväčšiu hodnotu dolného ohraničenia (d) a najmenšiu hodnotu horného ohraničenia (h).
NETREBA...

Príklad:

Vypíšte členy postupnosti a zistite, či je ohraničená.



$a: 2; 4; 6; 8$

Postupnosť je ohraničená.

Všetky členy sú

≥ 2 Postupnosť je ohraničená zdola.

≤ 8 Postupnosť je ohraničená zhora.

Vypíšte prvých 5 členov daných postupností a použite ich k ďalšiemu cvičeniu (pripomeňte si vlastnosti príslušných funkcií).

$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots$ (Pomoc: $a_{1000} = \frac{1}{1000}$)

$\{2^n - 1\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad 1; 3; 7; 15; 31; \ldots$

$\{2 - n^2\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad 1; -2; -7; -14; -23 \ldots$

$\left\{\sin\frac{\pi}{4}n\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad \frac{\sqrt{2}}{2}; 1; \frac{\sqrt{2}}{2}; 0; -\frac{\sqrt{2}}{2}; \ldots$

$\{(-2)^n\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad -2; 4; -8; 16; -32 \ldots$

$\{2 - 3n\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad -1; -4; -7; -10; -13; \ldots$

$\left\{1 - \frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad 0; \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \ldots$ (Pomoc: $a_{1000} = \frac{999}{1000}$)

Priraď postupnosti správnu vlastnosť.

Postupnosť	monotónnosť	platí pre n-tý člen	ohraničenosť
$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$			
$\left\{2^n-1\right\}_{n=1}^{\infty}$			
$\left\{2-n^2\right\}_{n=1}^{\infty}$			
$\left\{\sin\frac{\pi}{4}n\right\}_{n=1}^{\infty}$			
$\left\{(-2)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$			
$\left\{2-3n\right\}_{n=1}^{\infty}$			
$\left\{1-\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$			

klesajúca rastúca nie je monotónna

ohraničená nie je ohraničená

zdola ohraničená zhora ohraničená

$-1 \le a_n \le 1$ $-\infty < a_n < \infty$

$0 \le a_n < 1$ $0 < a_n \le 1$

$a_n \ge 1$ $a_n \le 1$

$a_n \le -1$

Cvičenie je zo stránky https://gymmoldava.sk/ICV/CELYWEB/indexICV.php?show=postupnosti
(autorka: Mgr. Iveta Hermanovská)

Svoje riešenie si skontrolujte ... →

Priraď postupnosti správnu vlastnosť.

Postupnosť	monotónnosť	platí pre n-tý člen	ohraničenosť
$\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$	klesajúca	$0 < a_n \le 1$	ohraničená
$\left\{2^n-1\right\}_{n=1}^{\infty}$	rastúca	$a_n \ge 1$	zdola ohr.
$\left\{2-n^2\right\}_{n=1}^{\infty}$	klesajúca	$a_n \le 1$	zhora ohr.
$\left\{\sin\frac{\pi}{4}n\right\}_{n=1}^{\infty}$	nie je monot.	$-1 \le a_n \le 1$	ohraničená
$\left\{(-2)^n\right\}_{n=1}^{\infty}$	nie je monot.	$-\infty < a_n < \infty$	nie je ohr.
$\left\{2-3n\right\}_{n=1}^{\infty}$	klesajúca	$a_n \le -1$	zhora ohr.
$\left\{1-\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$	rastúca	$0 \le a_n < 1$	ohraničená

klesajúca rastúca nie je monotónna

ohraničená nie je ohraničená

zdola ohraničená zhora ohraničená

$-1 \le a_n \le 1$ $-\infty < a_n < \infty$

$0 \le a_n < 1$ $0 < a_n \le 1$

$a_n \ge 1$ $a_n \le 1$

$a_n \le -1$

Cvičenie je zo stránky https://gymmoldava.sk/ICV/CELYWEB/indexICV.php?show=postupnosti
(autorka: Mgr. Iveta Hermanovská)