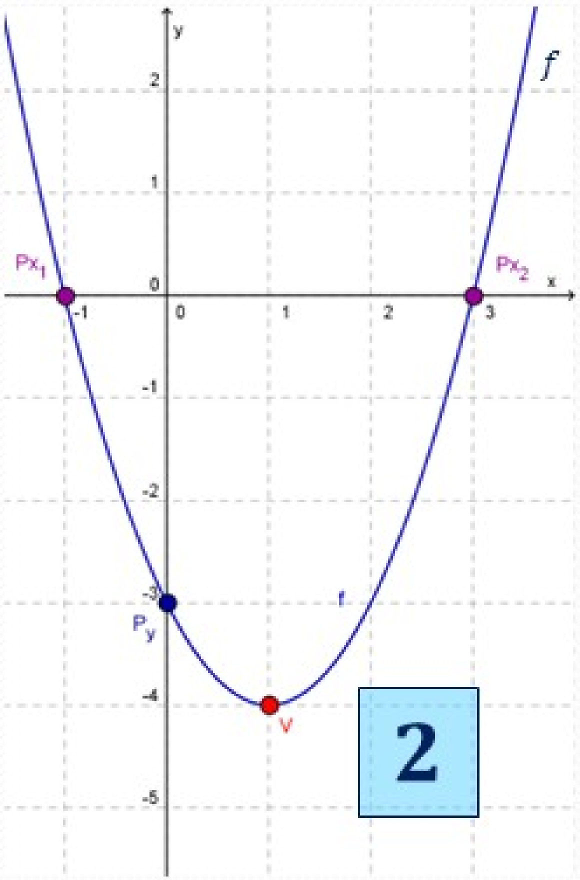
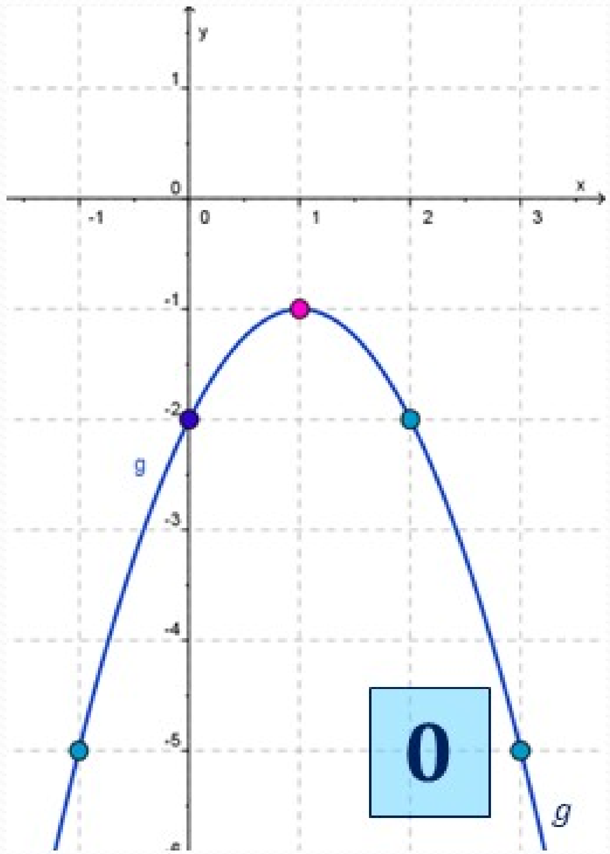
KVADRATICKÁ ROVNICA
(ZHRNUTIE)

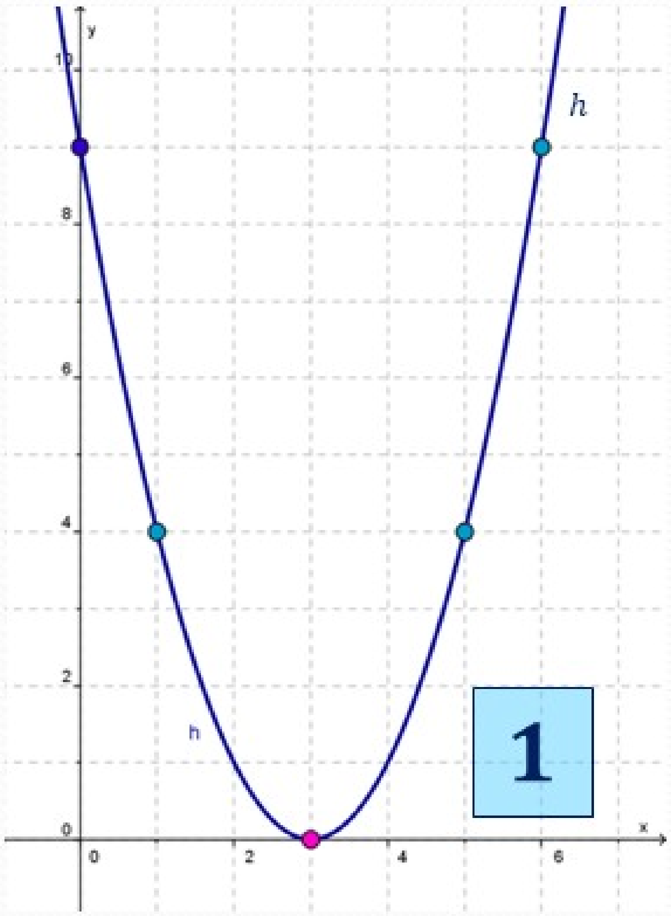
ZUZANA BARTOŠOVÁ

PRÍKLAD: Určte počet priesečníkov grafu danej funkcie s osou x.

$f: y = x^2 - 2x - 3$ $\quad$ $g: y = -x^2 + 2x - 2$ $\quad$ $h: y = x^2 - 6x + 9$







$0 = x^2 - 2x - 3$ $\quad$ $0 = -x^2 + 2x - 2$ $\quad$ $0 = x^2 - 6x + 9$

KVADRATICKÉ ROVNICE

KVADRATICKÁ ROVNICA

$$\boldsymbol{ax^2 + bx + c = 0}$$

$$\boldsymbol{x \in R, a \in R - \{0\}, b \in R, c \in R}$$

ÚLOHA: Nájsť množinu riešení (koreňov)- obor pravdivosti P

POSTUP:

GRAFICKY

Korene rovnice sú určené priesečníkmi paraboly $f: y = ax^2 + bx + c$ s osou x ($g: y = 0$)

VÝPOČTOM

PRÍKLAD: Graficky riešte v R rovnicu $x^2 + x + 2 = 0$.

$f: y = x^2 + x + 2$

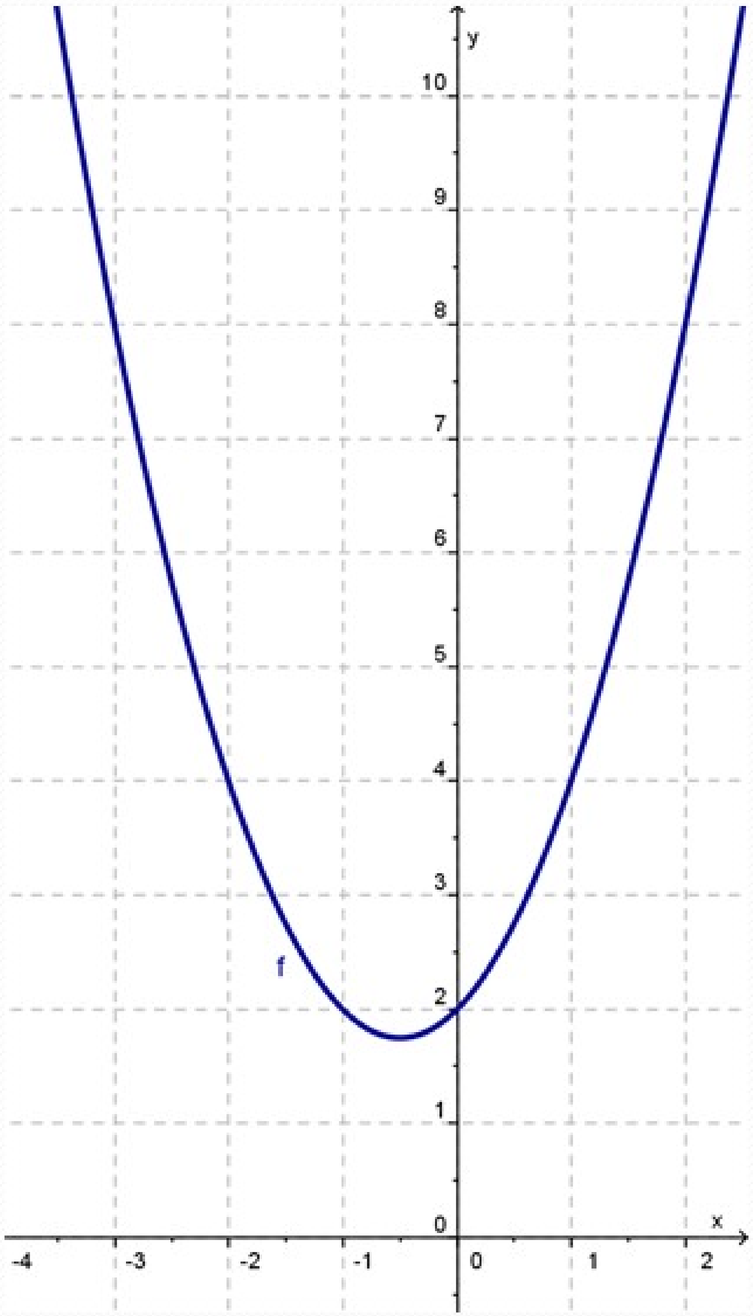
$g: y = 0$ (os x)

VRCHOL:

$$f: y = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 2 =$$

$$= \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{7}{4} \qquad V\left[-\frac{1}{2}; \frac{7}{4}\right]$$

PRIESEČNÍK S OSOU y: $P_y[0; 2]$



Graf funkcie nemá priesečník s osou x,
daná rovnica nemá v množine R riešenie.

$$\boldsymbol{P = \emptyset}$$

PRÍKLAD: **Graficky** riešte v R rovnicu $4x^2 - 12x + 9 = 0.$

$$f: y = 4x^2 - 12x + 9$$

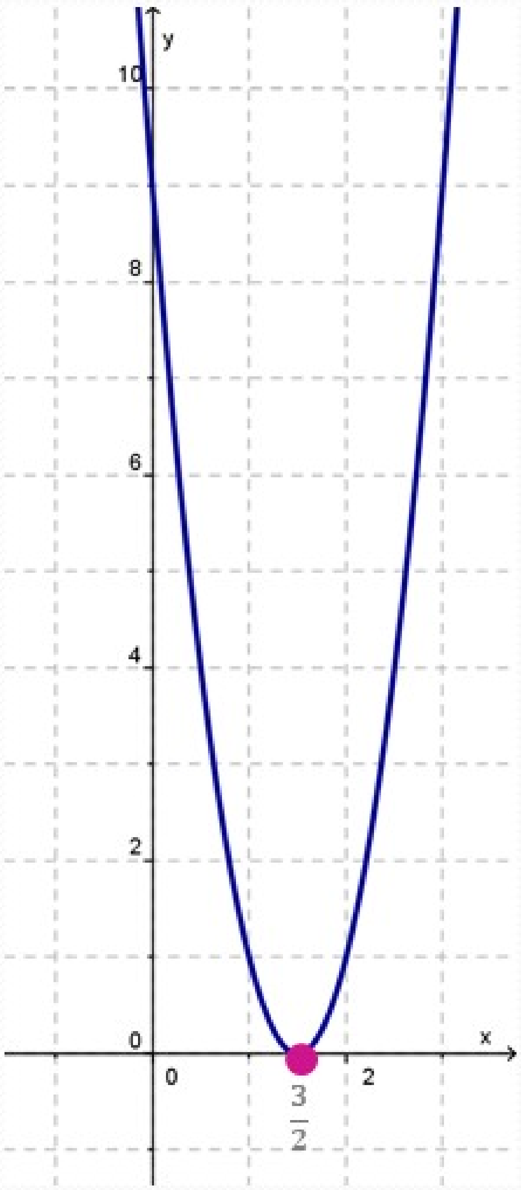
VRCHOL:

$$f: y = 4\left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) =$$

$$= 4\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 \qquad V\left[\frac{3}{2}; 0\right]$$

PRIESEČNÍK S OSOU y:

$$P_y[0; 9]$$



Daná rovnica má
v množine R jedno riešenie.

$$\boldsymbol{P = \left\{\frac{3}{2}\right\}}$$

KVADRATICKÁ ROVNICA

$$ax^2 + bx + c = 0$$

$$x \in R, a \in R - \{0\}, b \in R, c \in R$$

NEÚPLNÁ ROVNICA

- Bez absolútneho člena $(c = 0)$
- Bez lineárneho člena (rýdzokvadratická) $(b = 0)$

ÚPLNÁ ROVNICA

$$a \neq 0 \wedge b \neq 0 \wedge c \neq 0$$

NEÚPLNÉ KVADRATICKÉ ROVNICE

- **Kvadratická rovnica bez absolútneho člena.**

PRÍKLAD: Riešte v R rovnicu $5x^2 - 4x = 0$.

$$x \cdot (5x - 4) = 0 \Leftrightarrow (x = 0 \vee 5x - 4 = 0)$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = \frac{4}{5}$$

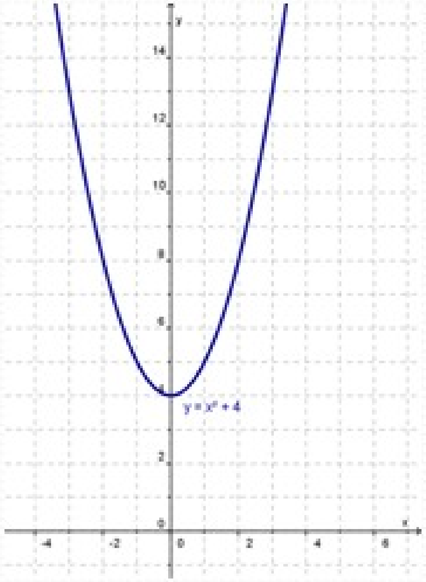
$$\boldsymbol{P = \left\{0; \frac{4}{5}\right\}}$$

- **Kvadratická rovnica bez lineárneho člena.**

PRÍKLAD: Riešte v R rovnicu $x^2 + 4 = 0$.

$$\boxed{\boldsymbol{x^2 \geq 0, x \in R}} \qquad x^2 = -4$$

$$\boldsymbol{P} = \emptyset$$



- **Kvadratická rovnica bez lineárneho člena.**

PRÍKLAD: Riešte v R rovnicu $x^2 - 4 = 0.$

1.spôsob: $\boxed{A^2 - B^2 = (A - B) \cdot (A + B)}$

$$(x-2) \cdot (x+2) = 0 \;\Leftrightarrow\; (x - 2 = 0 \vee x + 2 = 0)$$

$$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$$

$$\boldsymbol{P = \{\pm\, 2\}}$$

2.spôsob:

$$x^2 = 4$$

$$|x| = 2$$

$$x = \pm 2$$

$\boxed{\sqrt{x^2} = |x|}$

$$\boldsymbol{P = \{\pm\, 2\}}$$

ÚPLNÉ KVADRATICKÉ ROVNICE- riešenie

- Rozkladom kvadratického trojčlena na súčin lineárnych činiteľov.
  (Ľahké kvadratické trojčleny už vieme rozložiť.)

- Doplnením kvadratického trojčlena na štvorec.

- Použitím vzorca na výpočet koreňov kvadratickej rovnice.

VZOREC PRE KORENE KVADRATICKEJ ROVNICE

$$ax^2 + bx + c = 0, a \in R - \{0\}, b \in R, c \in R$$

Počet koreňov kvadratickej rovnice závisí od čísla D:

$$\boxed{D = b^2 - 4ac}$$ **diskriminant** kvadratickej rovnice

$D > 0$ rovnica má dva rôzne reálne korene

$$\boxed{x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}}$$

$D = 0$ rovnica má jeden dvojnásobný reálny koreň

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$D < 0$ rovnica nemá reálne korene

PRÍKLAD: Riešte v R rovnicu $x^2-2x-3=0.$

1. Rozkladom kvadratického trojčlena na súčin lineárnych činiteľov:

$$\underbrace{(x+1)\cdot(x-3)}_{x^2-2x-3}=0 \Leftrightarrow (x+1=0 \vee x-3=0)$$

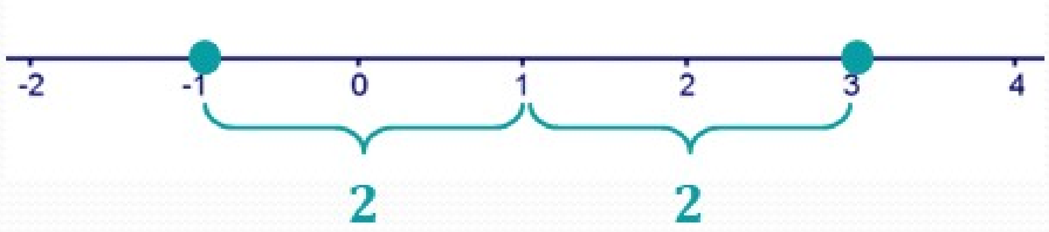
$$x_1=-1 \qquad x_2=3$$

2. Doplnením kvadratického trojčlena na štvorec:

$$(x-1)^2-4=0$$

$$(x-1)^2=4$$

$$|x-1|=2$$



$$x_1=-1 \qquad x_2=3$$

PRÍKLAD: Riešte v R rovnicu $x^2 - 2x - 3 = 0.$

3. Použitím vzorca na výpočet koreňov kvadratickej rovnice.

Úplná kvadratická rovnica, $a = 1; b = -2; c = -3.$

$$D = b^2 - 4ac$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)$$

$$D = 16 > 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-(-2) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{2+4}{2} = 3 \\ x_2 = \dfrac{2-4}{2} = -1 \end{cases}$$

$$\boldsymbol{P = \{-1; 3\}}$$

PRÍKLAD: Riešte v R rovnicu $2x^2 + 6x + 5 = 0$.

$$a = 2; b = 6; c = 5$$

$D = b^2 - 4ac$

$D = 6^2 - 4 \cdot 2 \cdot 5$

$D = -4 < 0$

$$\boldsymbol{P} = \emptyset$$

Vzťahy medzi koreňmi a koeficientmi kvadratickej rovnice.

Ak sú x_1, x_2 korene kvadratickej rovnice

$$ax^2+bx+c=0, a \neq 0, x \in R:$$

$$\boxed{\boldsymbol{x_1+x_2=-\frac{b}{a}}}$$

$$\boxed{\boldsymbol{x_1 \cdot x_2=\frac{c}{a}}}$$

Rozklad kvadratického trojčlena na súčin lineárnych činiteľov.

$$\boxed{\boldsymbol{ax^2+bx+c=a\cdot(x-x_1)\cdot(x-x_2)}}$$

PRÍKLAD: Zjednodušte výraz $\dfrac{4x^2+7x-2}{12x^2+5x-2}$ a určte podmienky.

$4x^2+7x-2=0$

$D=81>0$

$x_1=\dfrac{1}{4}$

$x_2=-2$

$D=b^2-4ac$

$x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$

$12x^2+5x-2=0$

$D=121>0$

$x_1=\dfrac{1}{4}$

$x_2=-\dfrac{2}{3}$

$$\frac{4x^2+7x-2}{12x^2+5x-2}=\frac{4\left(x-\frac{1}{4}\right)(x+2)}{12\left(x-\frac{1}{4}\right)\left(x+\frac{2}{3}\right)}=\frac{(x+2)}{3\left(x+\frac{2}{3}\right)}=\frac{x+2}{3x+2}$$

$x\neq\dfrac{1}{4}, x\neq-\dfrac{2}{3}$