



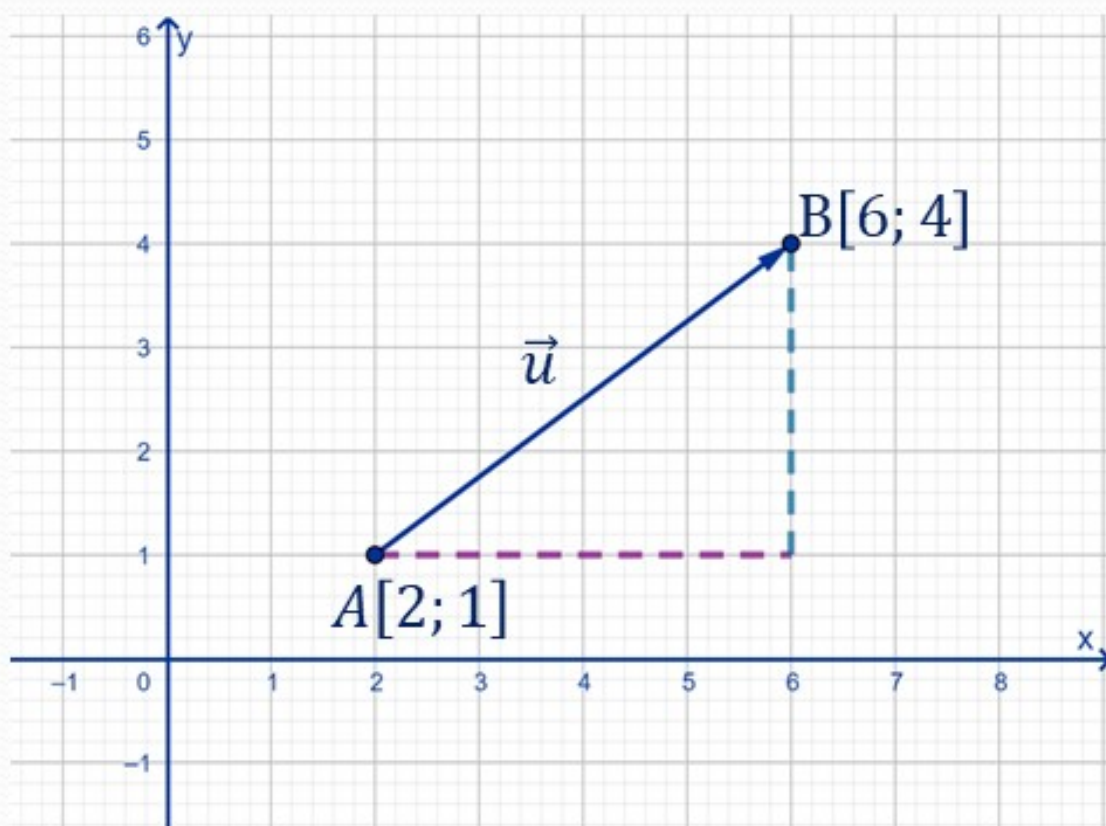
VEKTORY

(ZHRNUTIE)

ZUZANA BARTOŠOVÁ

VEKTOR je množina všetkých orientovaných úsečiek, ktoré majú rovnakú veľkosť, orientáciu a rovnaký smer.
Každá orientovaná úsečka daného vektora sa nazýva **UMIESTNENIE** vektora.

$$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$$



SYMBOLICKÁ ROVNICA:

$$A + \vec{u} = B$$

$$\vec{u} = (4; 3)$$

„Cesta“ z bodu A do bodu B

„4 doprava“

„3 hore“

SÚRADNICE VEKTORA

$$A[a_1; a_2], B[b_1; b_2] \quad \vec{u} = \overrightarrow{AB}$$

$$\vec{u} = B - A$$

„KONIEC- ZAČIATOK“

$$\vec{u} = (u_1; u_2) \quad u_1 = b_1 - a_1$$

$$u_2 = b_2 - a_2$$

PRÍKLAD:

Dané sú body $A[-3; 4]$ a $B[-4; 2]$. Určte súradnice vektora $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$.

$$\vec{u} = B - A = (-4 + 3; 2 - 4) = (-1; -2)$$

OPERÁCIE S VEKTORMI (vedieť aj graficky)

$$\vec{a} = (a_1; a_2) \quad \vec{b} = (b_1; b_2)$$

Súčet vektorov- výpočet:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2)$$

Opačný vektor:

$$-\vec{a} = (-a_1; -a_2)$$

Rozdiel vektorov- výpočet:

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2)$$

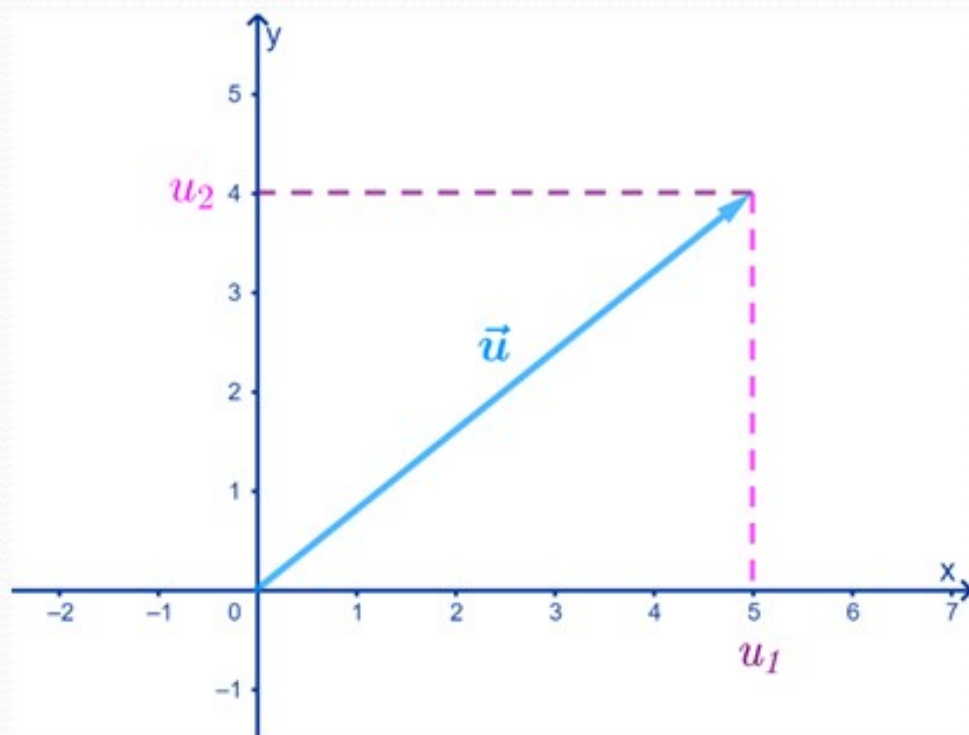
Súčin vektora a reálneho čísla k - výpočet:

$$\vec{u} = k \cdot \vec{a} = (k \cdot a_1; k \cdot a_2)$$

$$\vec{u} \parallel \vec{a} \wedge |\vec{u}| = |k| \cdot |\vec{a}|$$

VEĽKOSŤ VEKTORA v rovine:

$$\vec{u} = (u_1; u_2)$$



$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

V priestore: $\vec{u} = (u_1; u_2; u_3)$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

PRÍKLAD: Vypočítajte veľkosť vektora $\vec{u} = \left(-\frac{2}{3}; \frac{1}{3}; \frac{2}{3}\right)$

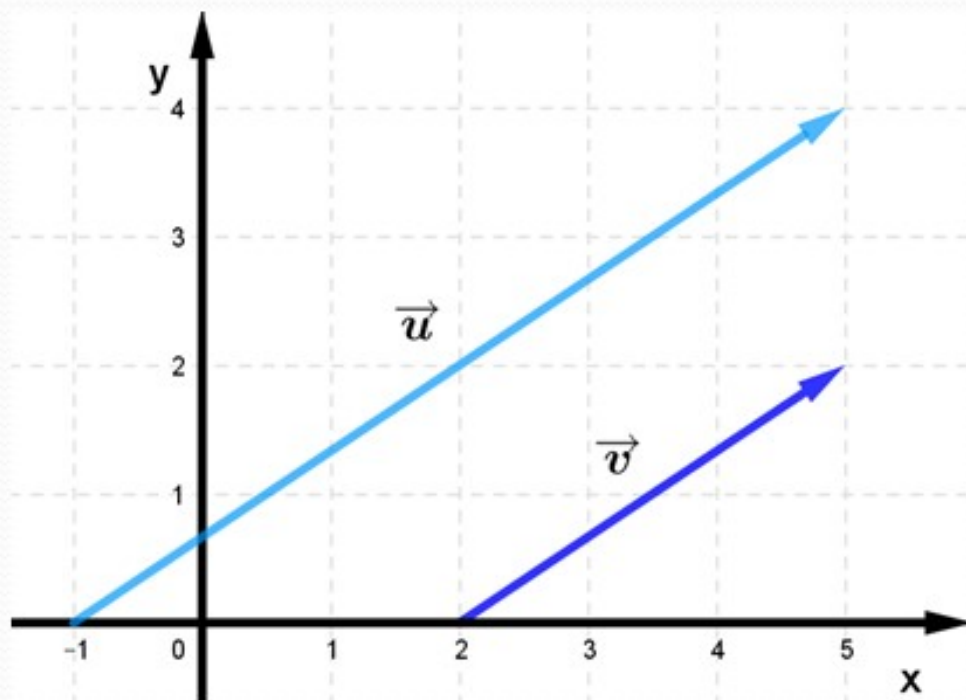
$$|\vec{u}| = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9}} = 1$$

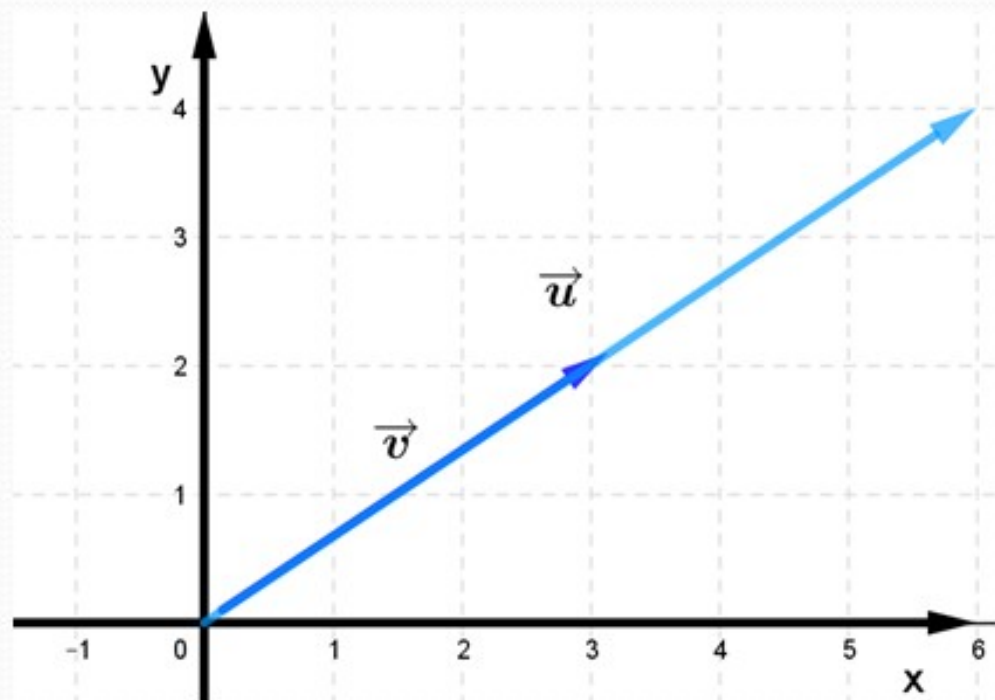
Každý vektor, ktorého veľkosť sa rovná jednej, sa nazýva **jednotkový**.

Dva vektory nazývame lineárne závislé, ak jeden z nich je násobkom druhého vektora.

$$\vec{u} = k \cdot \vec{v}, k \in R$$



$$\vec{u} = (6; 4) \quad \vec{v} = (3; 2)$$



$$\vec{u} = 2\vec{v}$$

Ak sú dva vektory rovnobežné, sú aj lineárne závislé.
(dajú sa umiestniť na jednu priamku)

Príklad: Zistite, či sú dané dvojice vektorov lineárne závislé.

$$\diamond \quad \vec{u} = (6; -2) \quad \vec{v} = (-3; 1)$$

Hľadáme k :

$$\vec{u} = k \cdot \vec{v}; k \in R$$

Po súradniciach:

$$6 = k \cdot (-3) \Rightarrow k = -2$$

$$-2 = k \cdot 1 \Rightarrow k = -2$$

$$\vec{u} = -2 \cdot \vec{v}$$

Dané vektory sú LZ.

$$\diamond \quad \vec{a} = (-4; 4) \quad \vec{b} = (2; -4)$$

$$-4 = k \cdot 2 \Rightarrow k = -2$$

$$4 = k \cdot (-4) \Rightarrow k = -1$$

Dané vektory sú LN.

Dva vektory sú lineárne nezávislé, ak sa ani jeden z nich nedá vyjadriť ako násobok druhého vektora.

Tri vektory sú lineárne závislé, keď môžeme jeden z nich vyjadriť ako lineárnu kombináciu ostatných dvoch:

$$\vec{w} = k\vec{u} + l\vec{v}; k \in R; l \in R$$

Príklad:

Vyjadrite vektor $\vec{c} = (8; -1)$ ako lineárnu kombináciu vektorov $\vec{a} = (1; 1)$ a $\vec{b} = (2; -1)$.

Hľadáme k a l : $\vec{c} = k \cdot \vec{a} + l \cdot \vec{b}$

$$(8; -1) = k(1; 1) + l(2; -1)$$

Po súradniciach: $8 = k + 2l$

$$-1 = k - l$$

Vyriešime sústavu dvoch rovníc s dvomi neznámymi: $l = 3; k = 2$

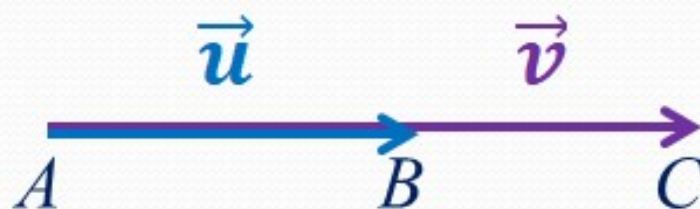
Riešenie: $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$

Uhol (napr. φ) dvoch nenulových vektorov $\vec{u}$ a $\vec{v}$ je uhol CAB , kde A je spoločný počiatočný bod oboch vektorov a B a C sú ich koncové body.

$$0^\circ \leq \varphi \leq 180^\circ$$

$$\vec{u} \neq \vec{0}$$

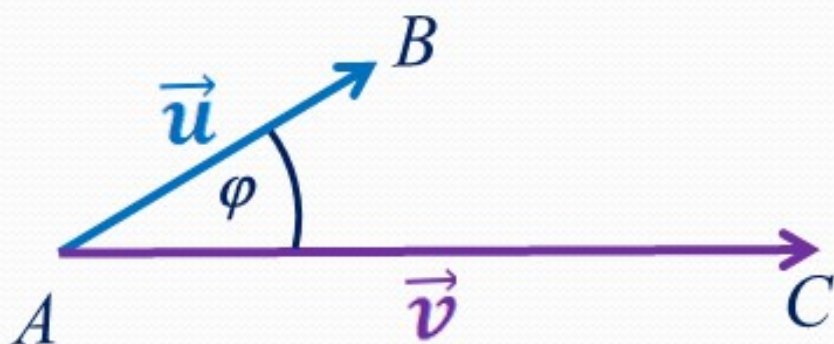
$$\vec{v} \neq \vec{0}$$



$$\varphi = 0^\circ$$



$$\varphi = 180^\circ$$

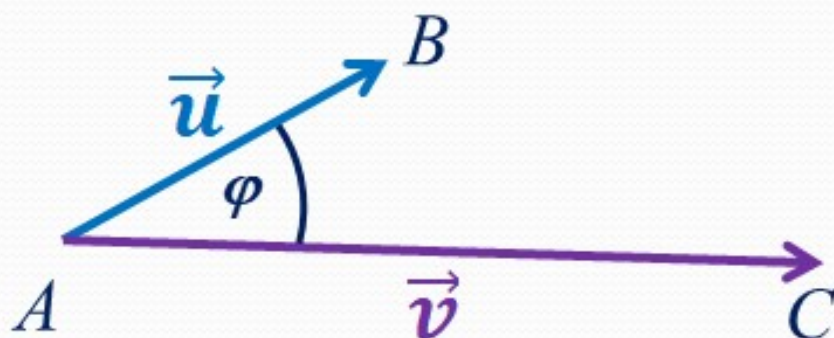


$$\varphi \in (0^\circ; 180^\circ)$$

VZOREC PRE VÝPOČET UHLA DVOCH VEKTOROV V ROVINE

$$\vec{u} = (u_1; u_2)$$

$$\vec{v} = (v_1; v_2)$$



$$\vec{u} \neq \vec{o}$$

$$\vec{v} \neq \vec{o}$$

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$$

$$\cos \varphi = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Príklad: Vypočítajte uhol vektorov

$$\vec{u} = (-1; 2)$$

$$\vec{v} = (1; 3)$$

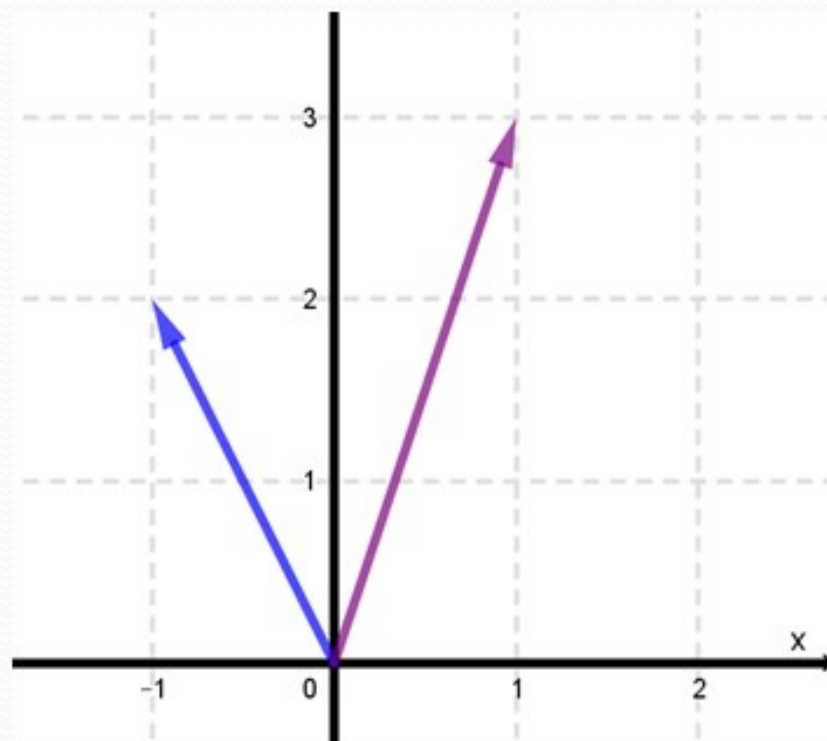
$$|\vec{u}| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

$$\cos \varphi = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{(-1) \cdot 1 + 2 \cdot 3}{\sqrt{5} \cdot \sqrt{10}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = 45^\circ$$

Dané vektory zvierajú uhol 45° .



$$\vec{u} = (u_1; u_2) \neq \vec{0}$$

$$\vec{v} = (v_1; v_2) \neq \vec{0}$$

$$\cos \varphi = \frac{u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

Číslo, ktoré nazývame SKALÁRNY SÚČIN vektorov a značíme $\vec{u} \cdot \vec{v}$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \varphi$$

Príklad: Vypočítajte skalárny súčin vektorov, ak je dané:

$$\text{❖} \quad \vec{u} = (3; -4); \quad \vec{v} = (-2; -1)$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = 3 \cdot (-2) + (-4) \cdot (-1) = -2$$

$$\text{❖} \quad |\vec{u}| = 7; \quad |\vec{v}| = 6 \quad \text{a uhol vektorov je } \varphi = 60^\circ$$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos \varphi = 7 \cdot 6 \cdot \cos 60^\circ = 21$$

Príklad: Vypočítajte skalárny súčin a uhol vektorov

$$\vec{u} = (4; -2)$$

$$\vec{v} = (1; 2)$$

Skalárny súčin:

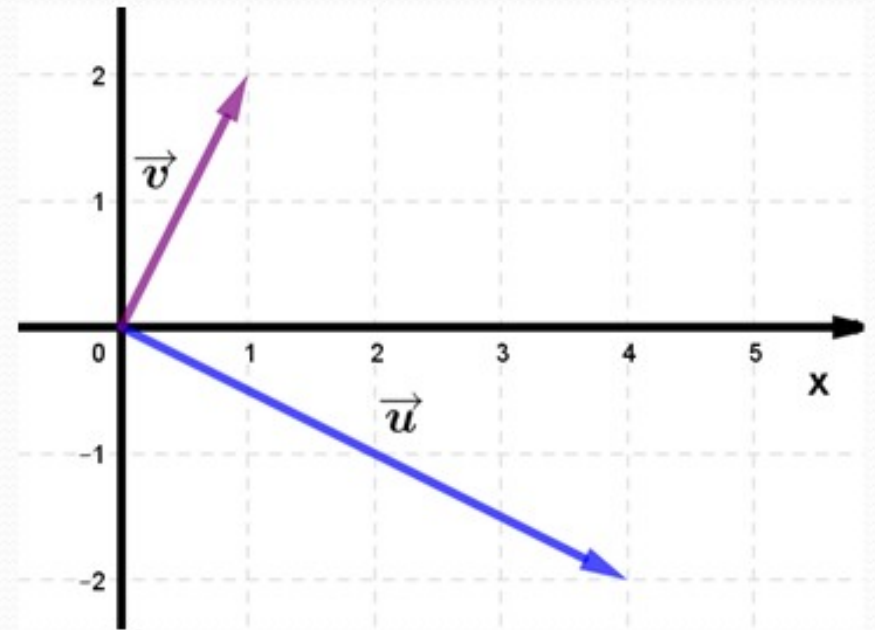
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 = 0$$

Uhol:

$$\cos \varphi = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = 0 \Rightarrow \varphi = 90^\circ$$

Dané vektory sú na seba kolmé.

$$\vec{u} \perp \vec{v}$$



**Dva nenulové vektory sú na seba kolmé práve vtedy,
ak je ich skalárny súčin rovný nule.**

Príklad: Nájdite aspoň dva vektory, ktoré sú kolmé na vektor

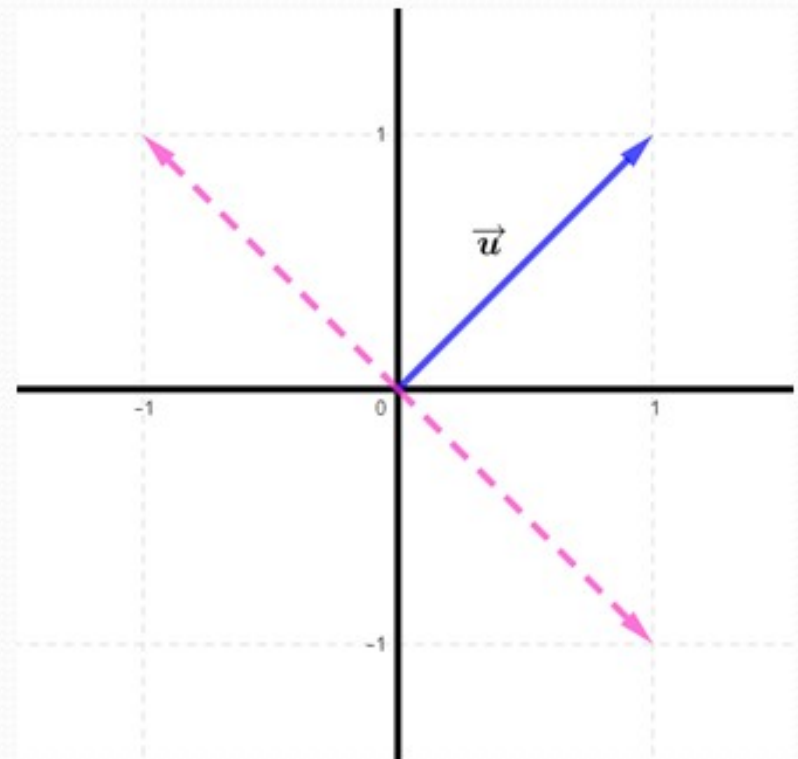
$$\vec{u} = (1; 1)$$

Môžu to byť napr. vektory

$$(-1; 1); (1; -1)$$

alebo ich násobky (LZ vektory)

Overte skalárne súčiny (0?)



Rýchle riešenie pri hľadaní kolmého vektora v rovine:

Stačí vymeniť poradie súradníc a jednu z nich zmeniť na opačnú.

