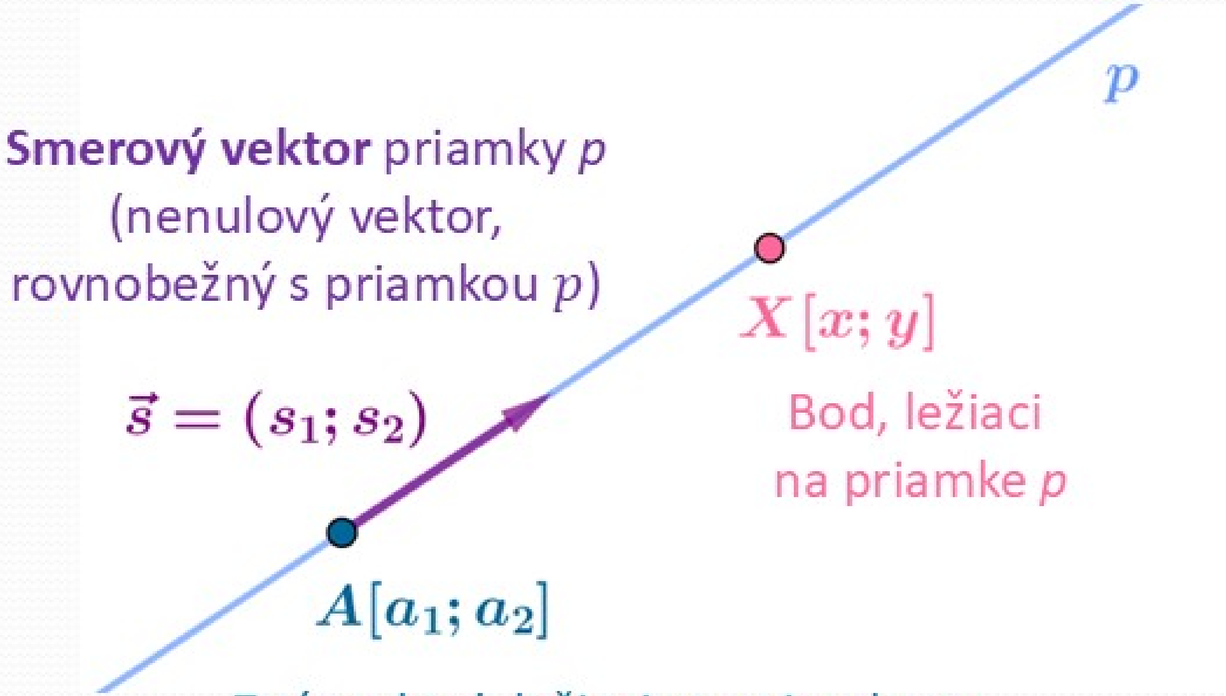
ANALYTICKÁ GEOMETRIA

PRIAMKA V ROVINE

(ZHRNUTIE)

ZUZANA BARTOŠOVÁ

PARAMETRICKÉ VYJADRENIE PRIAMKY



Známy bod, ležiaci na priamke *p*

Po súradniciach:

$$p\colon x = a_1 + t \cdot s_1$$
$$y = a_2 + t \cdot s_2$$

$$t \in R$$

Parameter *t*- reálne čísla

Symbolická rovnica:

$$\forall X \in p\colon X = A + t \cdot \vec{s} \qquad t \in R$$

Každá priamka má nekonečne veľa parametrických vyjadrení.

Príklad: a. Napíšte parametrické vyjadrenie priamky $\overleftrightarrow{AB} = p$,

b. zistite, či na nej ležia body ***C***, ***D***.

$$A[1;2], B[-2;7], C[4;\ -3], D[-2;0]$$

Smerový vektor: $\vec{s} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-3;5)$

Tu môže byť ľubovoľný násobok vektora $\vec{s}$ (LZ).

Symbolická rovnica: $p: X = A + t \cdot \vec{s} \qquad t \in R$

Tu môže byť aj bod ***B*** (leží na priamke).

Po súradniciach: $p: x = 1 - 3t \qquad t \in R$

$$y = 2 + 5t$$

b. zistite, či na nej ležia body ***C***, ***D***.

$$A[1;2], B[-2;7], C[4;\ -3], D[-2;0]$$

$$p: x = 1 - 3t \qquad t \in R$$
$$y = 2 + 5t$$

Ak bod leží na priamke, jeho súradnice musia vyhovovať vyjadreniu priamky.

$C \in p\,?$ $\quad 4 = 1 - 3t \Rightarrow t = -1$ $\qquad C = A - 1 \cdot \vec{s}$

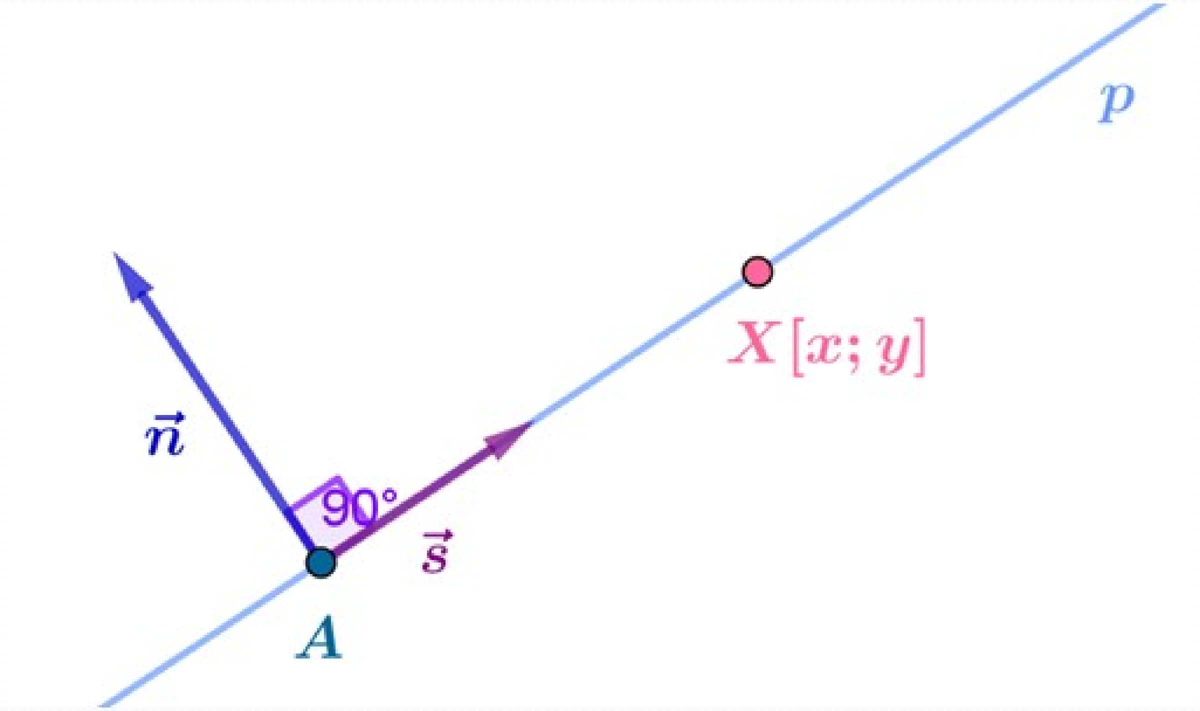
$-3 = 2 + 5t \Rightarrow t = -1$ $\qquad C \in p$

$D \in p\,?$ $\quad -2 = 1 - 3t \Rightarrow t = 1$

$0 = 2 + 5t \Rightarrow t = -\dfrac{2}{5}$ $\qquad D \notin p$

VŠEOBECNÁ ROVNICA PRIAMKY

$$p: ax + by + c = 0; \quad a \neq 0 \vee b \neq 0; c \in R$$



$$\vec{n} = (a; b)$$

Normálový vektor priamky p– vektor kolmý na priamku (teda aj na jej smerový vektor)

$[x; y]$...súradnice ľubovoľného bodu priamky p

Príklad: Napíšte <u>všeobecnú rovnicu </u> priamky $\overleftrightarrow{AB} = p$

$$A[1;2], B[-2;7]$$

Smerový vektor: $\vec{s} = \overrightarrow{AB} = B - A = (-3;5)$

Normálový vektor: $\vec{n} = (5;3)$

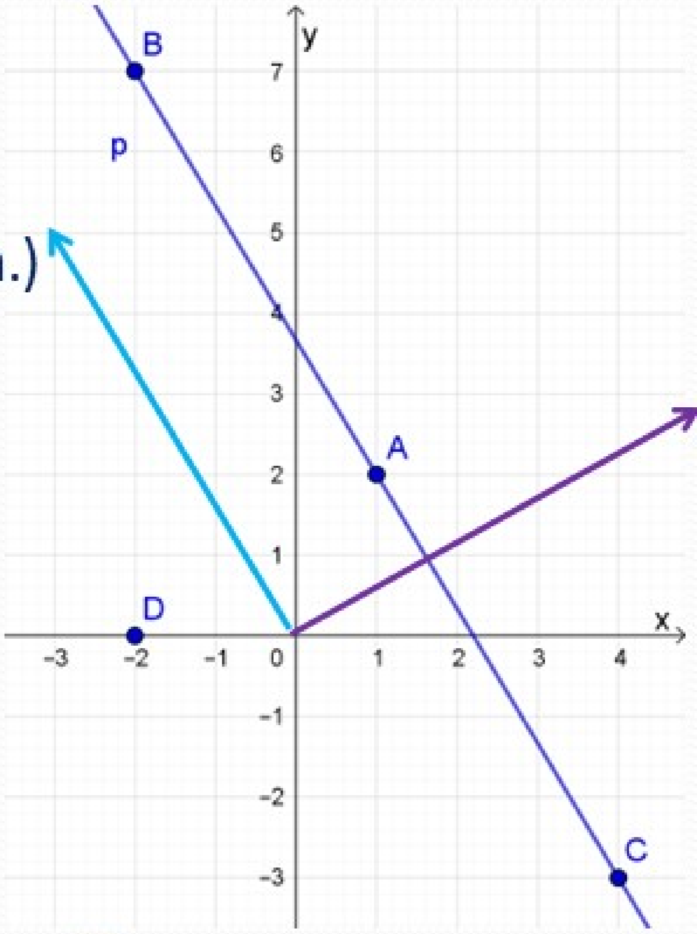
(Spomeňte si na „rýchlu cestu“ k nájdeniu kolmého vektora.)

Všeobecná rovnica priamky p: $5x + 3y + c = 0$

Bod A (alebo B) leží na priamke, jeho súradnice musia vyhovovať rovnici priamky- dosadíme a nájdeme c.

$$A \in p:\ 5 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + c = 0$$

$$c = -11$$



Všeobecná rovnica priamky $\underline{p:\ 5x + 3y - 11 = 0}$

Riešenie použitím parametrického vyjadrenia priamky:

$$p: x = 1 - 3t \qquad /\cdot 5 \qquad\qquad t \in R$$

$$\mathrm{y} = 2 + 5t \qquad /\cdot 3$$

$$5x = 5 - 15t$$

$$3\mathrm{y} = 6 + 15t$$

$$+$$

$$5x + 3y = 11$$

$$p:\ 5x + 3y - 11 = 0$$

SMERNICOVÝ TVAR ROVNICE PRIAMKY

$$\boldsymbol{p}: \boldsymbol{y} = \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{x} + \boldsymbol{q} \quad \boldsymbol{k} \in \boldsymbol{R}, \boldsymbol{q} \in \boldsymbol{R}$$

$\boldsymbol{k}$ – smernica priamky

$$k = tg\varphi = \frac{s_2}{s_1};\ s_1 \neq 0$$

$\boldsymbol{\varphi}$ – smerový uhol priamky

(uhol, ktorý zviera priamka s kladnou časťou osi x)

$\vec{\boldsymbol{s}} = (s_1;\ s_2)$ je smerový vektor priamky

$|\boldsymbol{q}|$ – veľkosť úseku, ktorý priamka vytína na osi y

Poznámka:

Priamky rovnobežné s osou y majú smerový uhol $\varphi = 90°$,
ale nemajú smernicu, ani smernicový tvar rovnice. (tg$90°$ nie je definovaný)

Príklad:

Napíšte smernicový tvar rovnice priamky p, ktorá je určená bodmi $A[2;-3]$, $B[-4;1]$.

Možnosti riešenia:

1. zo všeobecnej rovnice- vyjadrením y,
2. dosadením súradníc dvoch daných bodov do rovnice $\boldsymbol{y = kx + q}$

$p: y = k \cdot x + q \quad k \in R, q \in R$

$A \in p$: $-3 = k \cdot 2 + q$

$B \in p$: $\quad 1 = k \cdot (-4) + q$

....

$k = -\dfrac{2}{3}; q = -\dfrac{5}{3}$ $\qquad$ $\boldsymbol{p\colon y = -\dfrac{2}{3}x - \dfrac{5}{3}}$

Príklad:

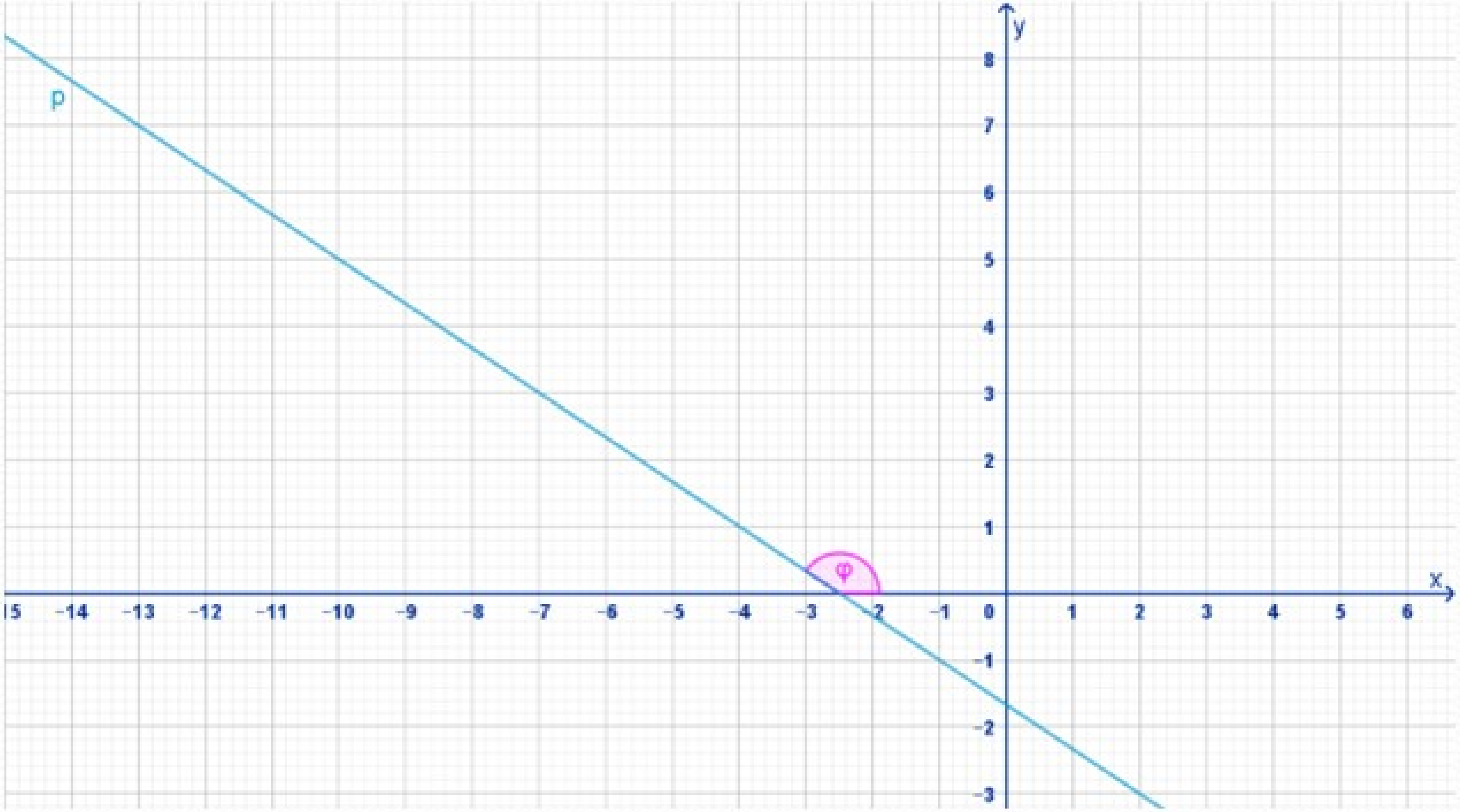
Určte veľkosť smerového uhla priamky z predchádzajúceho príkladu.

$$p\colon\ y = -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$$

$$k = -\frac{2}{3}$$

$$\mathrm{tg}\varphi = -\frac{2}{3}$$

$$\boldsymbol{\varphi \doteq 146,31°}$$



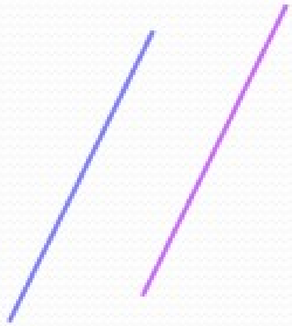
VZÁJOMNÁ POLOHA DVOCH PRIAMOK V ROVINE

$\boldsymbol{p}, \boldsymbol{q}$

rovnobežné

$\vec{s}_p \parallel \vec{s}_q,\ \vec{n}_p \parallel \vec{n}_q,\ \vec{s}_p \perp \vec{n}_q,\ \vec{n}_p \perp \vec{s}_q$

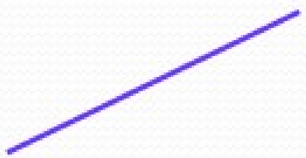
rôzne



$\boldsymbol{p} \parallel \boldsymbol{q}$

$\boldsymbol{p} \cap \boldsymbol{q} = \emptyset$

totožné



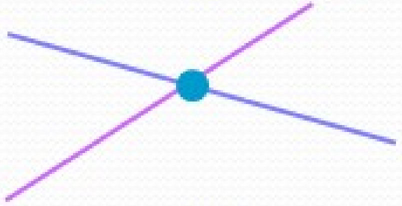
$\boldsymbol{p} \equiv \boldsymbol{q}$

$\boldsymbol{p} \cap \boldsymbol{q} \neq \emptyset$

$\boldsymbol{p} \cap \boldsymbol{q} = \boldsymbol{p} = \boldsymbol{q}$

rôznobežné

$\vec{s}_p \nparallel \vec{s}_q,\ \vec{n}_p \nparallel \vec{n}_q$



$\boldsymbol{p} \nparallel \boldsymbol{q}$

$\boldsymbol{p} \cap \boldsymbol{q} = \{\boldsymbol{P}\}$

Príklad: Určte vzájomnú polohu priamok p a q, ak

$$p: x = 1 + 3t, t \in R \qquad q: x = 2 + 6r, r \in R$$

$$y = 2 + 4t \qquad y = 4 + 8r$$

Určíme smerové vektory priamok:

$$\left.\begin{aligned}\vec{s}_p &= (3;4)\\ \vec{s}_q &= (6;8)\end{aligned}\right\}$$ Vektory sú LZ $\Rightarrow$ $(p \parallel q \text{ alebo } p \equiv q)$

$$\vec{s}_q = 2 \cdot \vec{s}_p$$

Ak by boli priamky totožné (splývajúce), mali by všetky body spoločné, teda aj bod $A[1;2]$, ktorý leží na p, by ležal aj na priamke q. Zistíme to:

$A \in q$?

$$\left.\begin{aligned}1 &= 2 + 6r \Rightarrow r = -\frac{1}{6}\\ 2 &= 4 + 8r \Rightarrow r = -\frac{1}{4}\end{aligned}\right\} A \notin q \qquad \boldsymbol{p \parallel q}$$

Dané priamky
sú rovnobežné rôzne.

Príklad: a. Určte vzájomnú polohu daných priamok, ak:

$t: 2x - y - 3 = 0 \qquad r: 3x + y - 2 = 0$

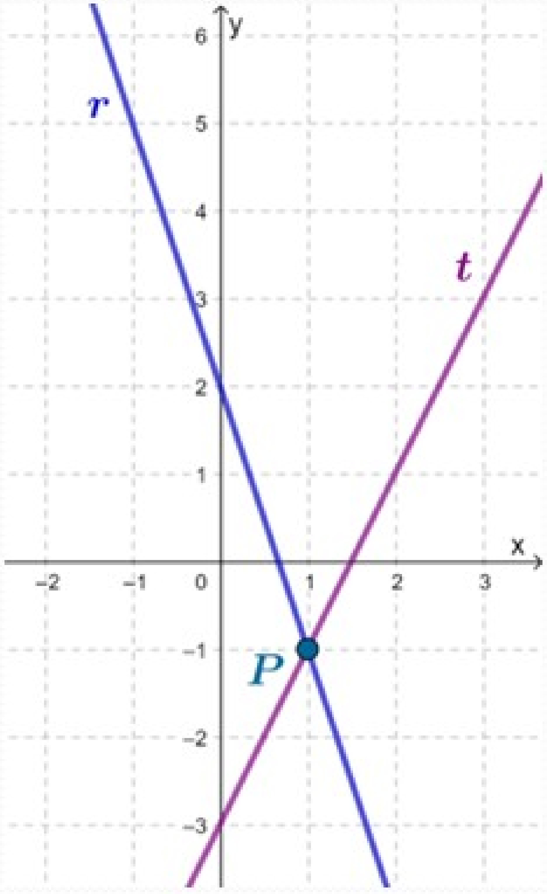
$$\left.\begin{array}{l}\vec{n}_t = (2; -1) \\ \vec{n}_r = (3; 1)\end{array}\right\} \text{Vektory sú LN } \Rightarrow \boldsymbol{t} \nparallel \boldsymbol{r}$$

Dané priamky sú rôznobežné.

b. Určte priesečník daných priamok.
(sústava dvoch rovníc s dvomi neznámymi)

$$t \cap r: \quad \begin{array}{r} 2x - y - 3 = 0 \\ 3x + y - 2 = 0 \\ \hline x = 1 \\ y = -1 \end{array}$$

$$\boldsymbol{t} \cap \boldsymbol{r} = \{\boldsymbol{P}[\mathbf{1}; -\mathbf{1}]\}$$



POSTUP PRI URČOVANÍ VZÁJOMNEJ POLOHY PRIAMOK

Preskúmame dvojicu vektorov (podľa zadania a Vašej vôle), buď dvojicu smerových, alebo dvojicu normálových vektorov, alebo smerový vektor jednej a normálový vektor druhej priamky a potom hľadáme ich spoločný(é) bod(y).

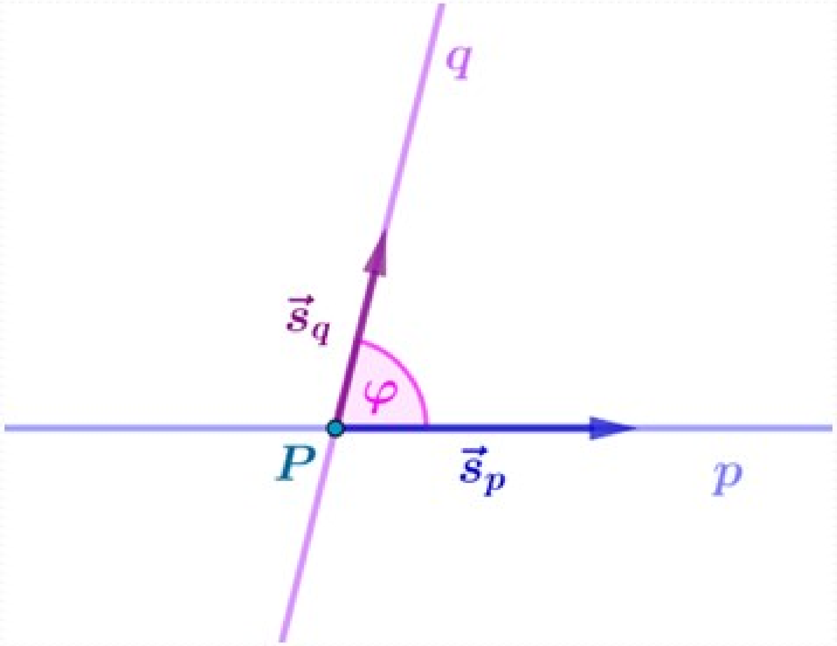
ALEBO:

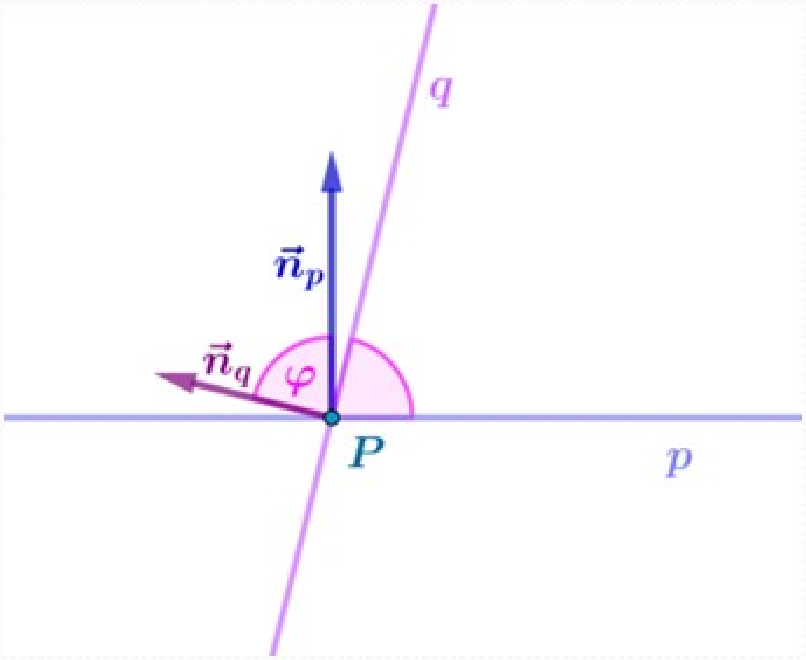
Hľadáme hneď prienik daných priamok riešením sústavy dvoch rovníc, zloženej z rovníc oboch priamok a podľa počtu jej riešení určíme vzájomnú polohu daných priamok.

<u>ODCHÝLKA</u> (napr. φ) dvoch priamok je veľkosť nulového, ostrého alebo pravého uhla, ktorého ramená ležia na daných priamkach.

$$\boldsymbol{\varphi \in \langle 0°; 90° \rangle}$$

Na výpočet odchýlky priamok p a q môžeme použiť ich smerové alebo normálové vektory:





$$\cos\varphi = \frac{|\vec{s}_p \cdot \vec{s}_q|}{|\vec{s}_p| \cdot |\vec{s}_q|}$$

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{n}_p \cdot \vec{n}_q|}{|\vec{n}_p| \cdot |\vec{n}_q|}$$

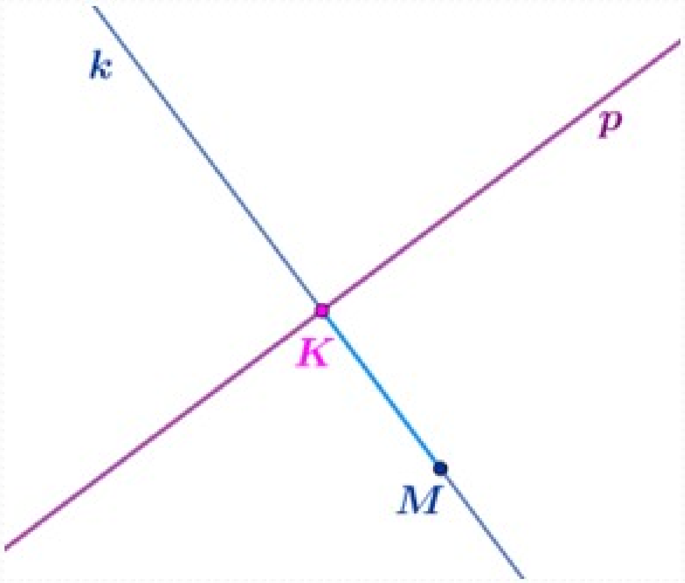
VZDIALENOSŤ BODU $M[x_M;\ y_M]$ OD PRIAMKY $p: ax + by + c = 0$

$$\boldsymbol{|Mp| = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}}$$

Čitateľ zlomku: v absolútnej hodnote výraz zo všeobecnej rovnice priamky, za x a y sú dosadené súradnice bodu M.

Menovateľ zlomku: veľkosť normálového vektora priamky p.

Poradili by ste si aj bez vzorca:
nájdeme priamku k, prechádzajúcu bodom M,
kolmú na priamku p, určíme $p \cap k = \{K\}$,
vypočítame vzdialenosť $|MK|$,
čo je vzdialenosť $|Mp|$.



Príklad:

Vypočítajte vzdialenosť bodu $M[2;-1]$ od priamky $p: 3x - 4y + 5 = 0$.

Normálový vektor priamky p: $\vec{n}_p = (3;-4)$

Veľkosť $\vec{n}_p$: $\left|\vec{n}_p\right| = \sqrt{9+16} = 5$

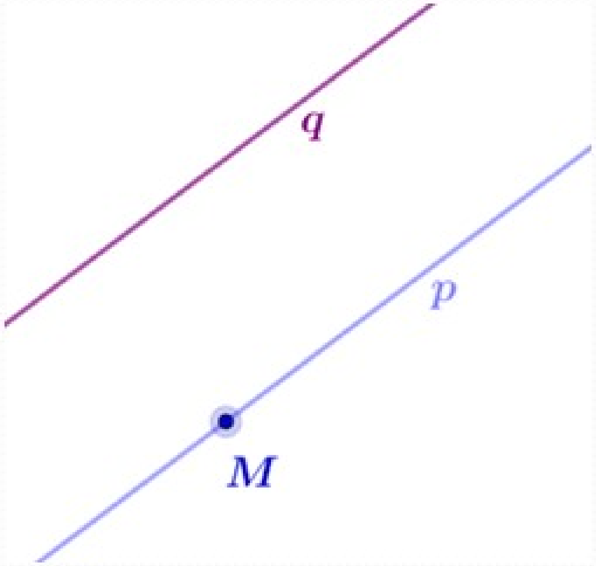
Použijeme vzorec: $$|\boldsymbol{Mp}| = \frac{|\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}_{\boldsymbol{M}} + \boldsymbol{b}\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{M}} + \boldsymbol{c}|}{\left|\vec{\boldsymbol{n}}_{\boldsymbol{p}}\right|}$$

$$|Mp| = \frac{|3 \cdot 2 - 4 \cdot (-1) + 5|}{5} = 3$$

Vzdialenosť bodu M od priamky p: $|\boldsymbol{Mp}| = \boldsymbol{3}$

S určením vzdialenosti bodu od priamky sa stretneme v rôznych príkladoch, napr.:

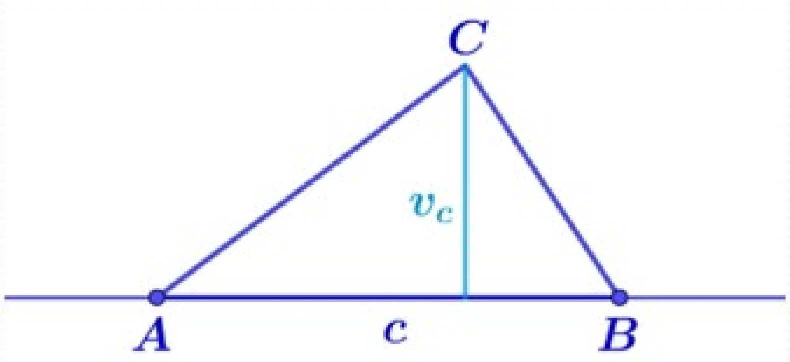
- Určte vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok p a q.



$$|pq| = |Mq|, M \in p$$

Určíme vzdialenosť ľubovoľného bodu priamky p od priamky q.

- Vypočítajte veľkosť výšky na stranu c v trojuholníku ABC.



$$v_c = |Cc|$$

Určíme vzdialenosť bodu C od priamky, na ktorej leží strana c $(\overleftrightarrow{AB})$.