



STEREOMETRIA METRICKÉ VZŤAHY (ZHRNUTIE)

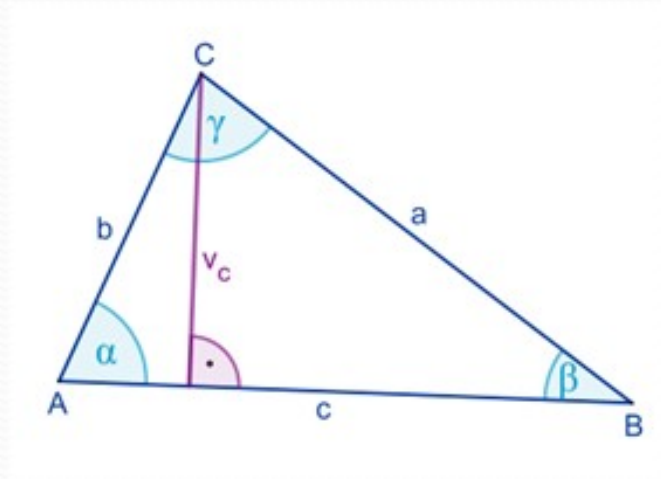
ZUZANA BARTOŠOVÁ

METRICKÉ VZŤAHY ÚTVAROV V PRIESTORE

Vzťahy, pri ktorých určujeme veľkosť (odchýlky, vzdialenosti).

Pripomenutie vzťahov z planimetrie a trigonometrie:

Trojuholník ABC



Sínusová veta

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$$

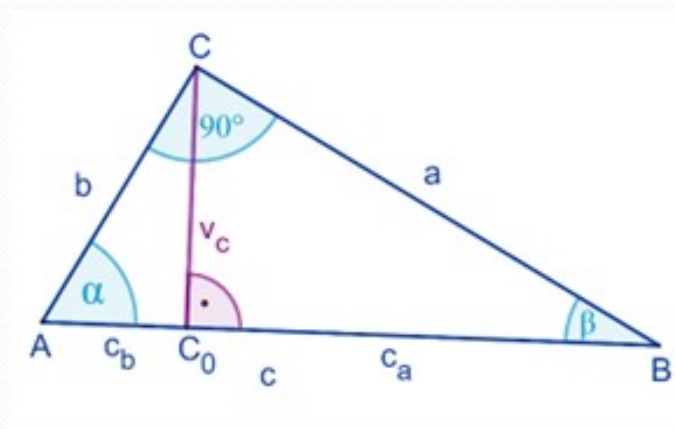
Kosínusová veta

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta$$

Pravouhlý trojúhelník ABC



Pytagorova veta $c^2 = a^2 + b^2$

Euklidova veta o výšce $v_c^2 = c_a \cdot c_b$

Euklidova veta o odvesne $a^2 = c \cdot c_a$
 $b^2 = c \cdot c_b$

Goniometrické funkcie

$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

délka protilehlé odvesny
délka přepony

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

délka přilehlé odvesny
délka přepony

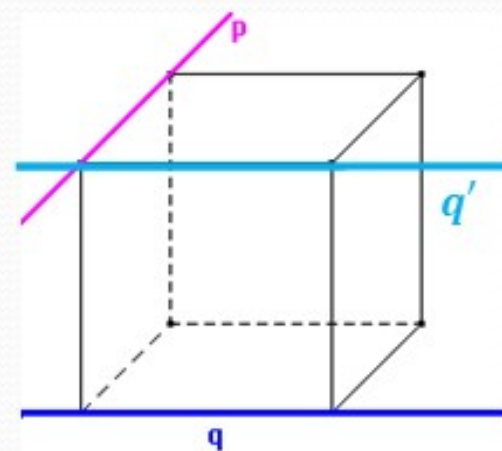
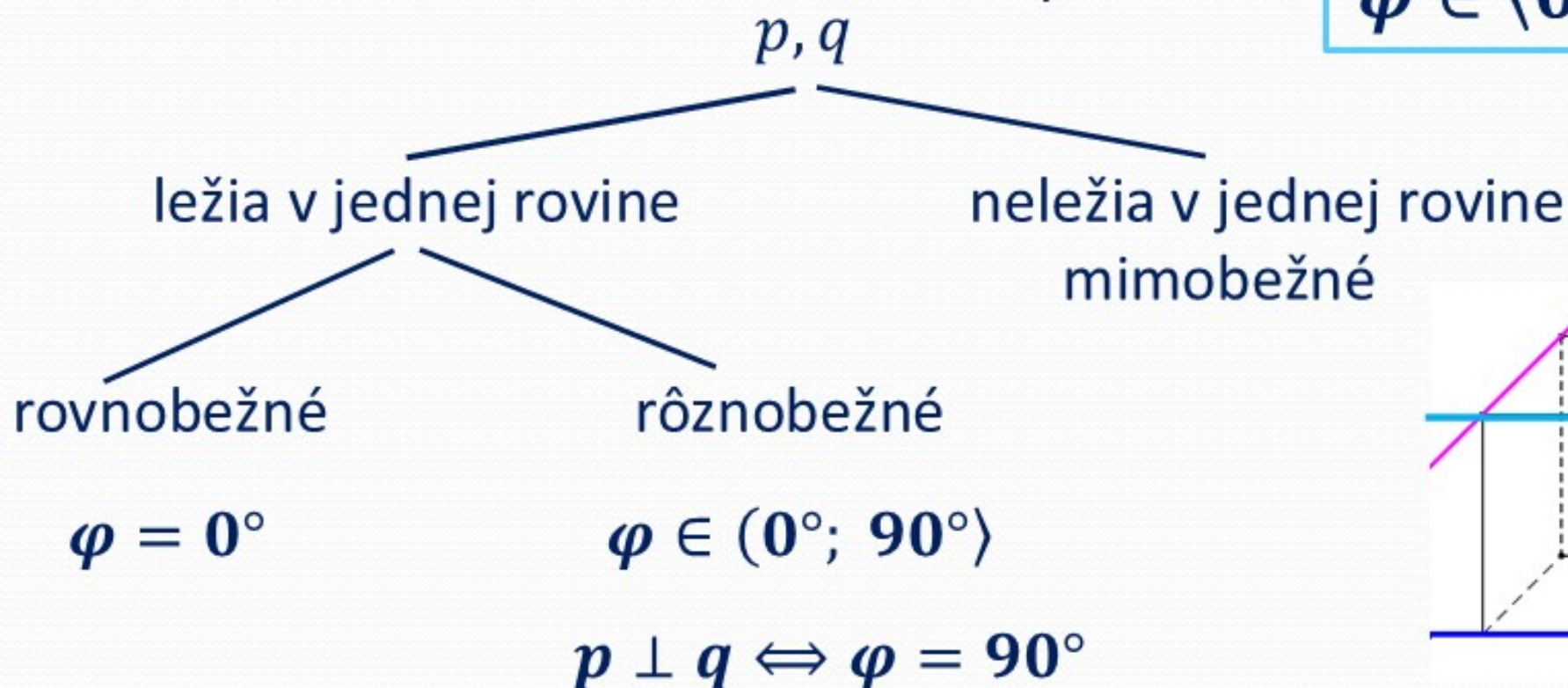
$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

délka protilehlé odvesny
délka přilehlé odvesny

ODCHÝLKA DVOCH PRIAMOK V PRIESTORE

Veľkosť odchýlky priamok p, q : $\underbrace{|\sphericalangle pq|}_{\varphi} \in \langle 0^\circ; 90^\circ \rangle$

$$\varphi \in \langle 0^\circ; 90^\circ \rangle$$



$$\varphi = |\sphericalangle pq| = |\sphericalangle pq'|$$
$$q' \parallel q$$

(prevedieme na odchýlku rôznobežiek)

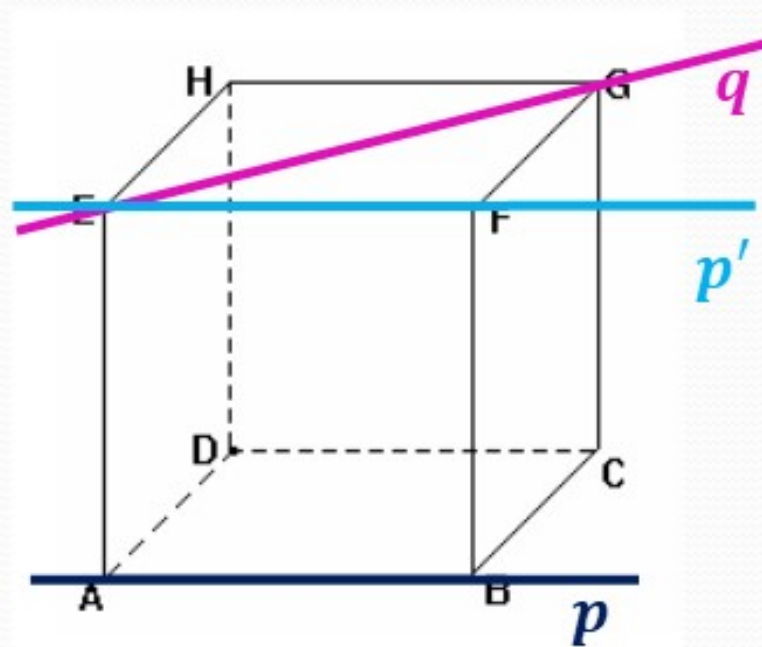
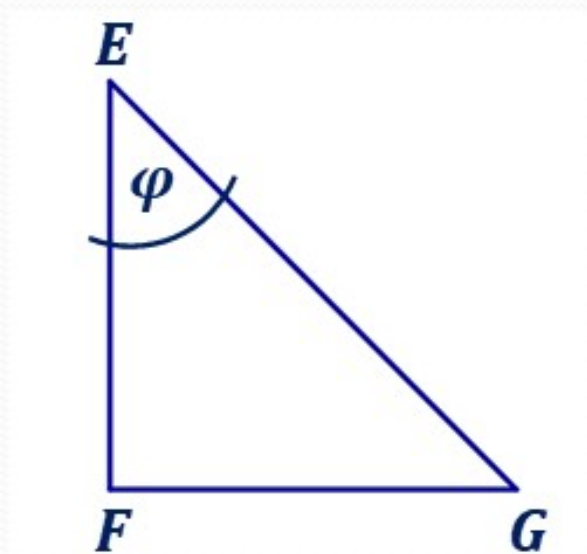
Príklad: Daná je kocka $ABCDEFGH$. Určte odchýlku priamok p, q , ak

a. $p = \overleftrightarrow{AB}, q = \overleftrightarrow{EG}$

b. $p = \overleftrightarrow{AB}, q = \overleftrightarrow{CG}$

c. $p = \overleftrightarrow{AH}, q = \overleftrightarrow{FC}$

a. $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{EG}$ (mimobežky)



$$\varphi = |\sphericalangle pq| = |\sphericalangle p'q|$$

Trojuholník EFG je pravouhlý, rovnoramenný:

$$\varphi = 45^\circ$$

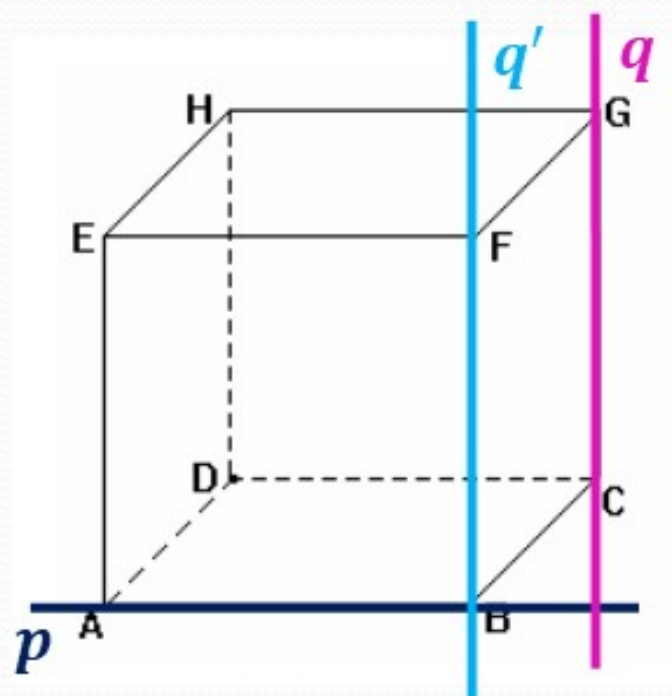
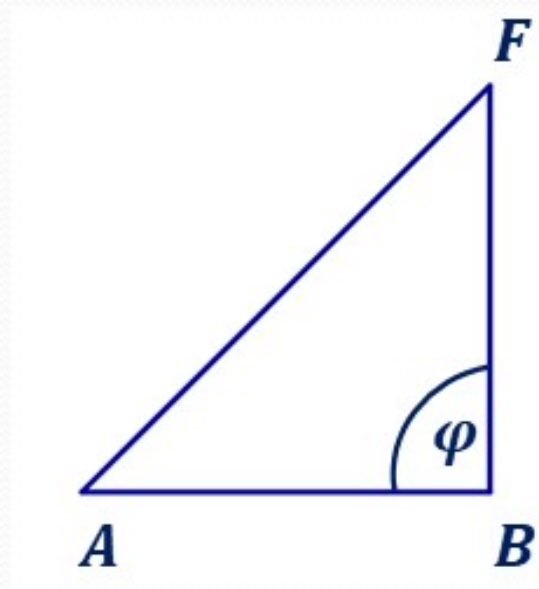
Príklad: Daná je kocka $ABCDEFGH$. Určte odchýlku priamok p, q , ak

a. $p = \overleftrightarrow{AB}, q = \overleftrightarrow{EG}$

b. $p = \overleftrightarrow{AB}, q = \overleftrightarrow{CG}$

c. $p = \overleftrightarrow{AH}, q = \overleftrightarrow{FC}$

b. $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CG}$ (mimobežky)



$$\varphi = |\sphericalangle pq| = |\sphericalangle pq'|$$

Trojuholník ABF je pravouhlý, rovnoramenný:

$$\varphi = 90^\circ$$

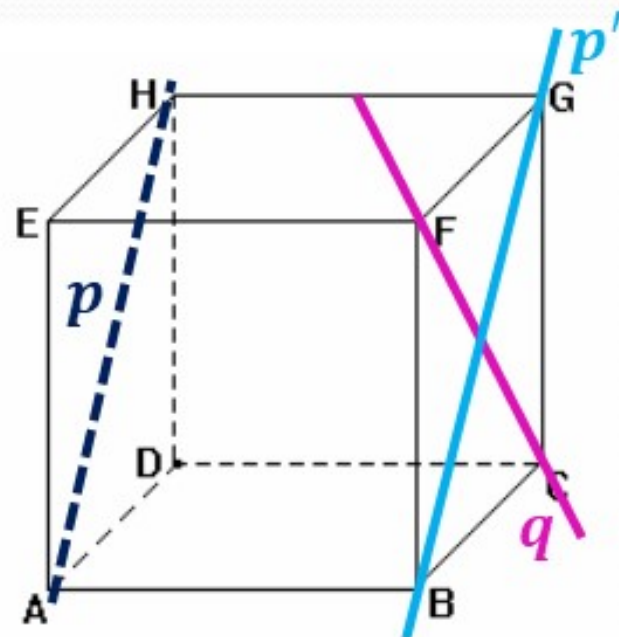
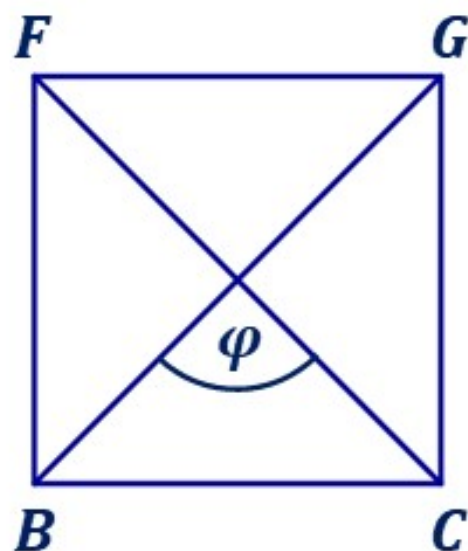
Príklad: Daná je kocka $ABCDEFGH$. Určte odchýlku priamok p, q , ak

a. $p = \overleftrightarrow{AB}, q = \overleftrightarrow{EG}$

b. $p = \overleftrightarrow{AB}, q = \overleftrightarrow{CG}$

c. $p = \overleftrightarrow{AH}, q = \overleftrightarrow{FC}$

c. $\overleftrightarrow{AH}, \overleftrightarrow{FC}$ (mimobežky)



$$\varphi = |\sphericalangle pq| = |\sphericalangle p'q|$$

$$\varphi = 90^\circ$$

ODCHÝLKA PRIAMKY OD ROVINY

Veľkosť odchýlky priamky
 p od roviny α :

$$\underbrace{|\angle p\alpha|}_{\varphi} \in \langle 0^\circ; 90^\circ \rangle$$

$$\varphi \in \langle 0^\circ; 90^\circ \rangle$$

p, α

priamka rovnobežná s rovinou

priamka rôznobežná s rovinou

$$p \parallel \alpha$$

$$p \subset \alpha$$

$$p \nparallel \alpha$$

$$\varphi = 0^\circ$$

$$\varphi \in (0^\circ; 90^\circ)$$

$$p \perp \alpha$$

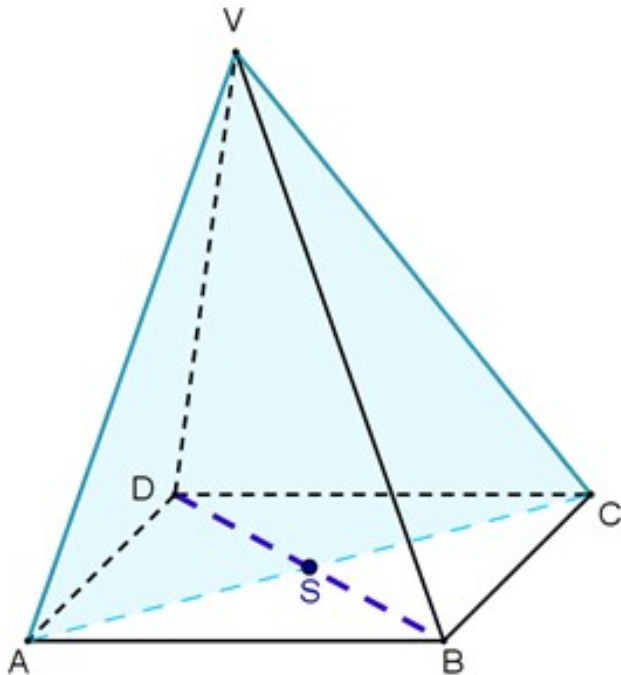
$$\varphi = 90^\circ$$

Kritérium kolmosti priamky a roviny

Priamka je kolmá na rovinu práve vtedy, keď je kolmá na dve rôznobežné priamky tejto roviny.

Príklad:

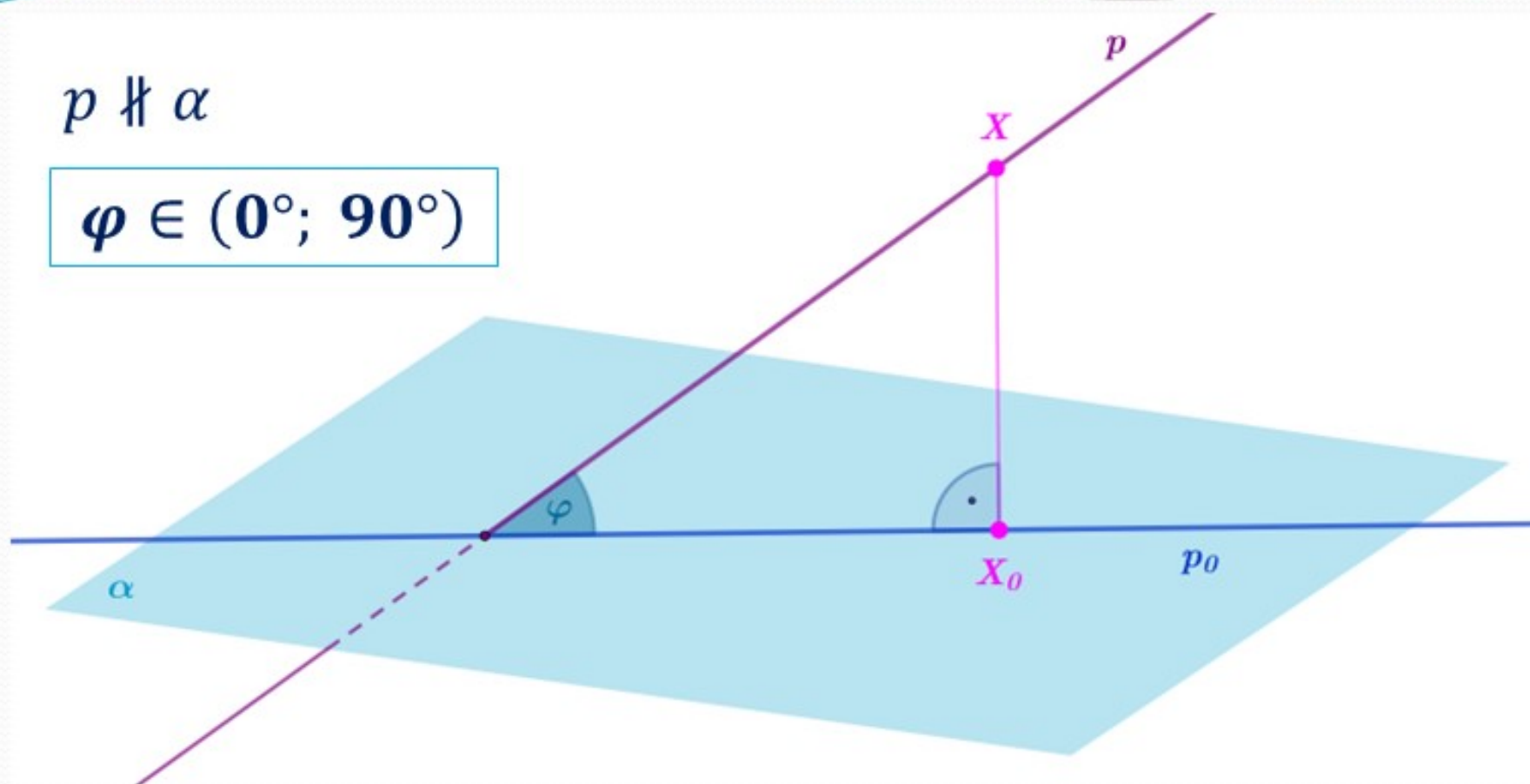
Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$. Zistite, či $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{ACV}$.



$$\left. \begin{array}{l} \overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC} \\ \overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{SV} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{ACV}$$

$$p \nparallel \alpha$$

$$\varphi \in (0^\circ; 90^\circ)$$



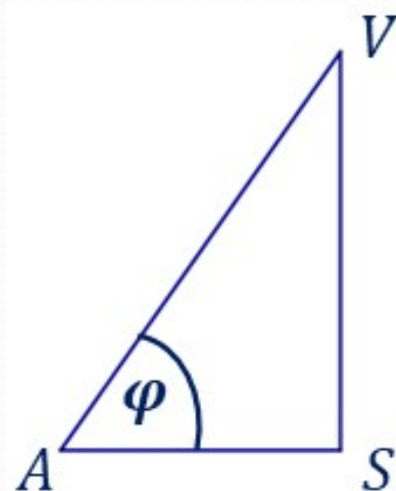
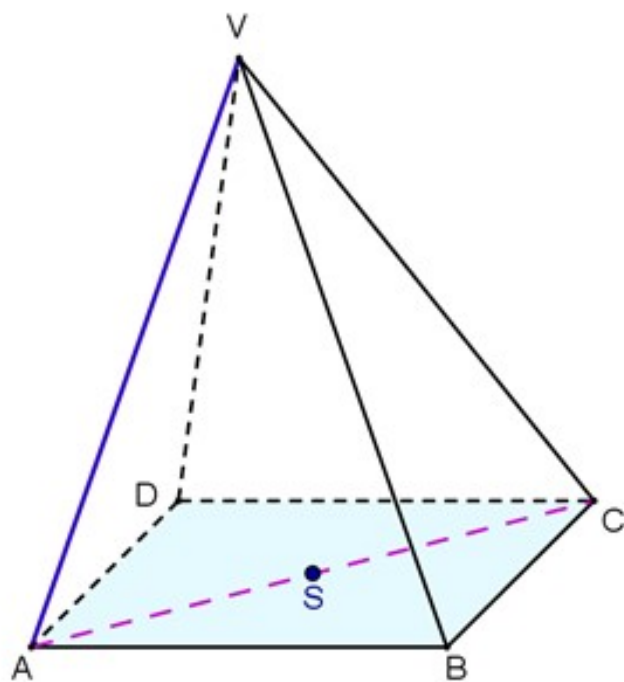
p_0 je pravouhlý priemet priamky p do roviny α

(X_0 je pravouhlý priemet bodu X do roviny α)

$$\varphi = |\sphericalangle p\alpha| = |\sphericalangle pp_0|$$

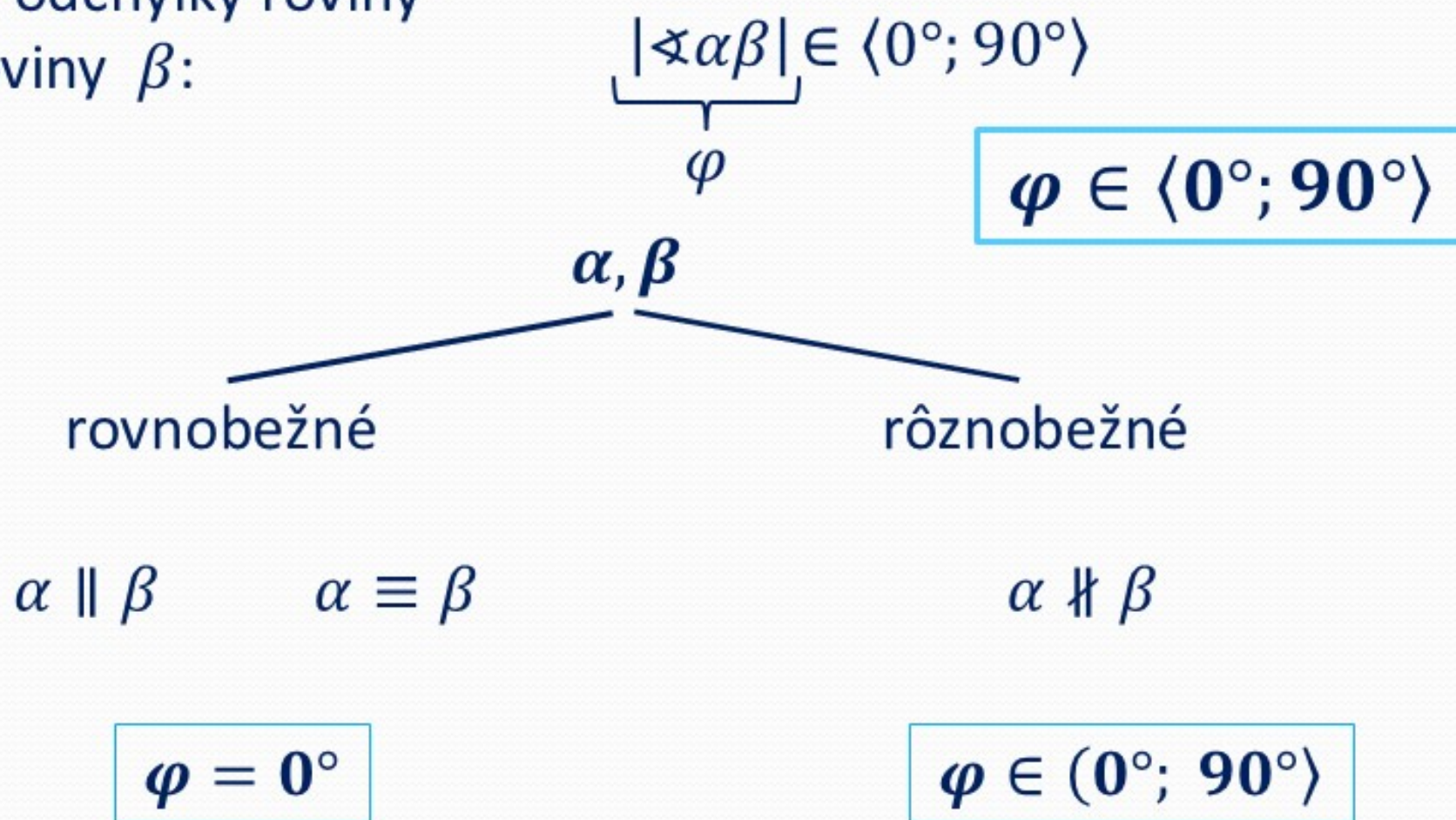
Odchýlka priamky od roviny (ak nie sú kolmé) = odchýlka priamky a jej pravouhlého priemetu do roviny.

Príklad: Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$, s výškou $v = 6 \text{ cm}$ a podstavnou hranou $|AB| = 4 \text{ cm}$.
Určte odchýlku priamky $\overleftrightarrow{AV}$ od roviny $\overleftrightarrow{ABC}$.



ODCHÝLKA DVOCH ROVÍN

Veľkosť odchýlky roviny α od roviny β :



$$\alpha \perp \beta$$

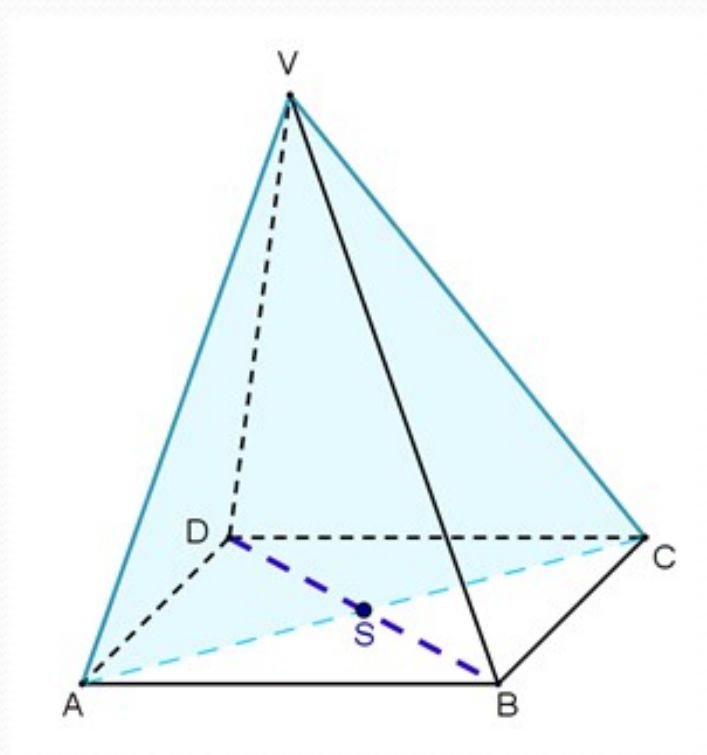
$$\varphi = 90^\circ$$

Kritérium kolmosti dvoch rovín

Ak jedna rovina obsahuje priamku kolmú na druhú rovinu, potom sú roviny na seba kolmé.

Príklad:

Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$. Zistite, či $\overleftrightarrow{ABC} \perp \overleftrightarrow{ACV}$.



$$\left. \begin{array}{l} \overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC} \\ \overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{SV} \end{array} \right\} \overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{ACV}$$

$$\overleftrightarrow{ABC} \perp \overleftrightarrow{ACV}$$

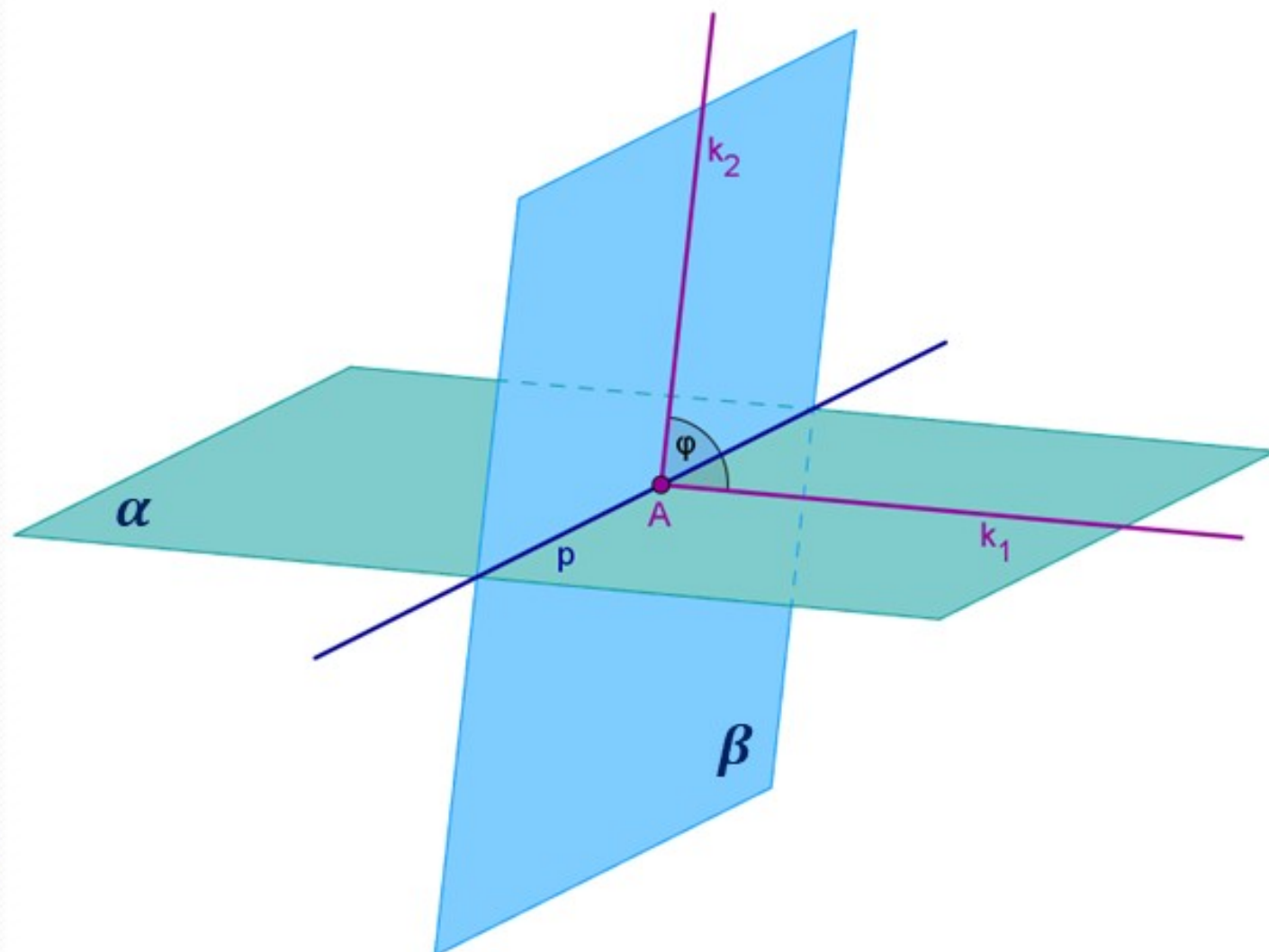
$$\alpha \nparallel \beta$$

$$\varphi \in (0^\circ; 90^\circ)$$

$$\alpha \cap \beta = p$$

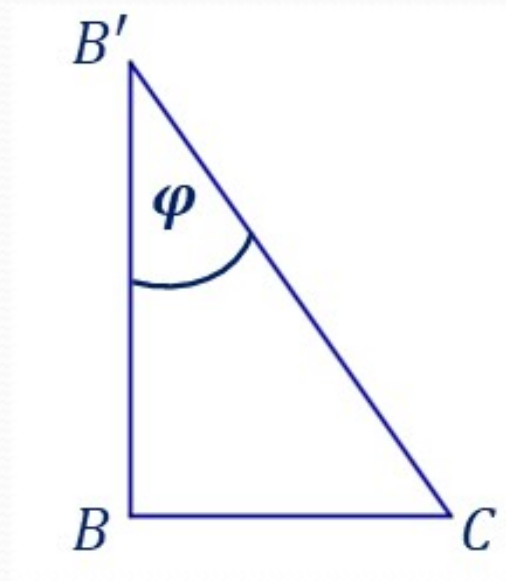
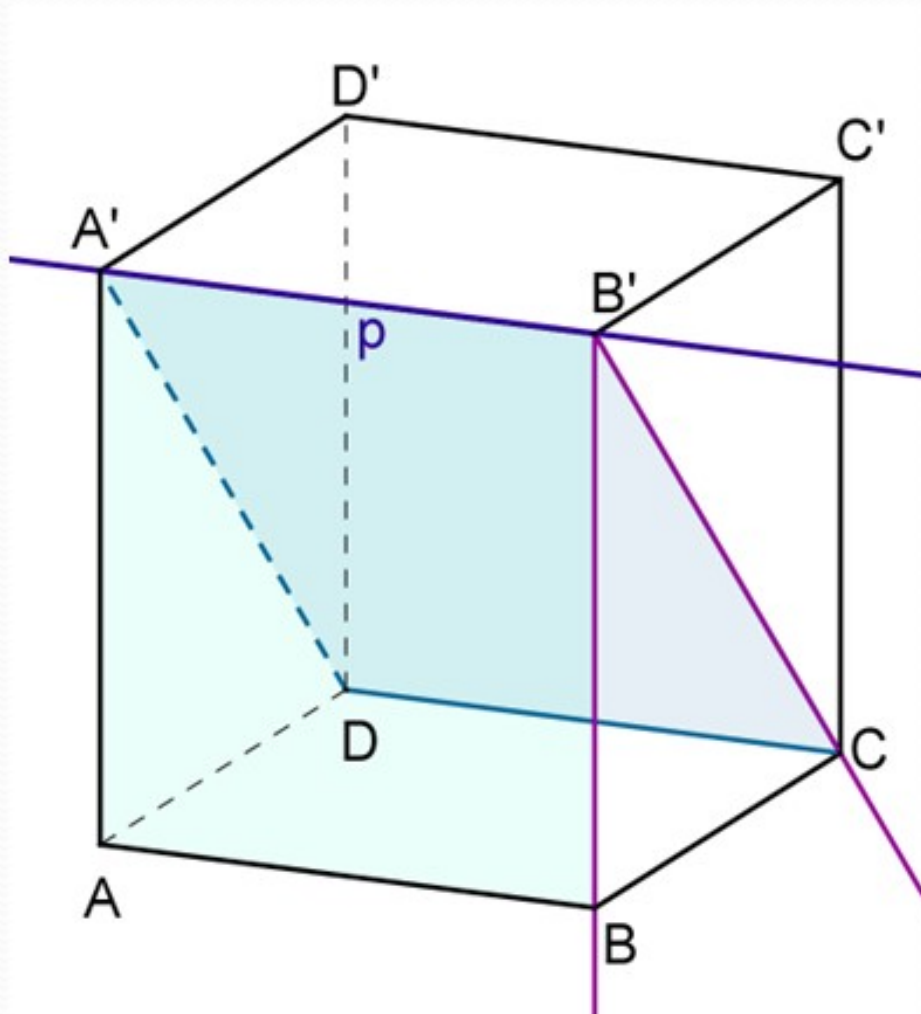
$$k_1 \perp p \wedge k_2 \perp p$$

$$\varphi = |\sphericalangle \alpha \beta| = |\sphericalangle k_1 k_2|$$

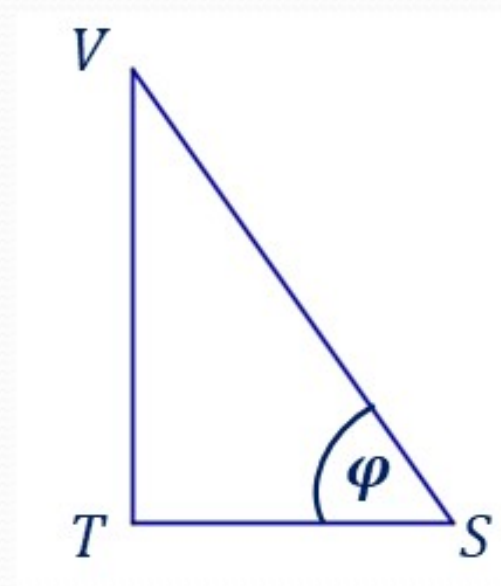
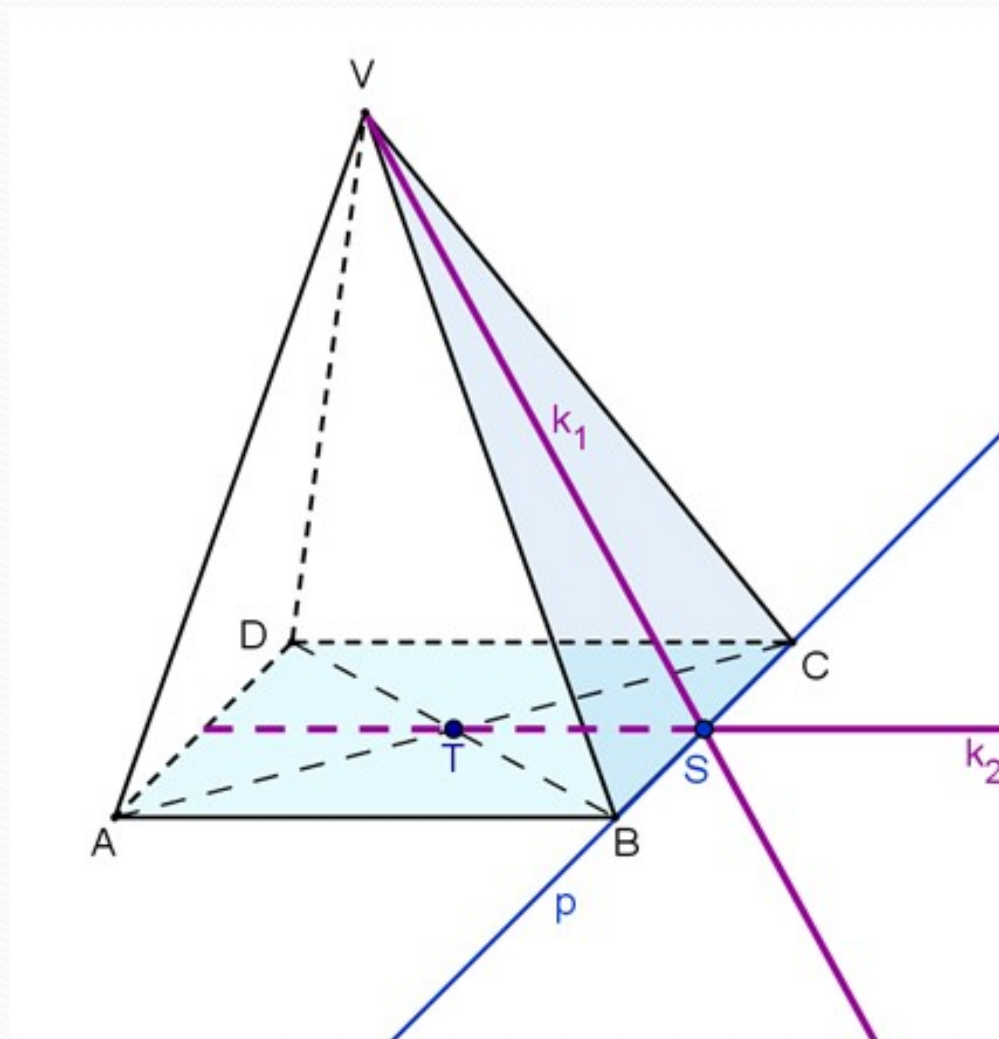


Odchýlka dvoch rôznobežných rovín je odchýlka dvoch priamok, ktoré ležia v daných rovinách a sú kolmé na priesečnicu daných rovín.

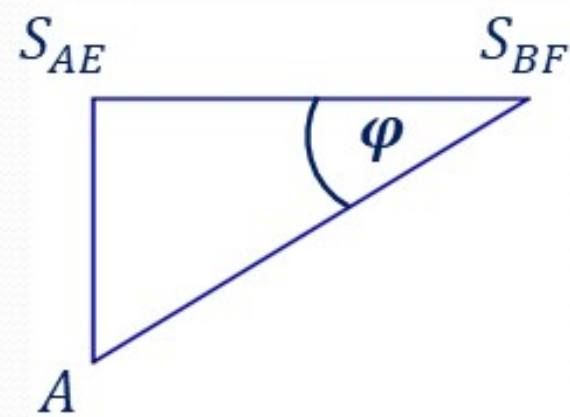
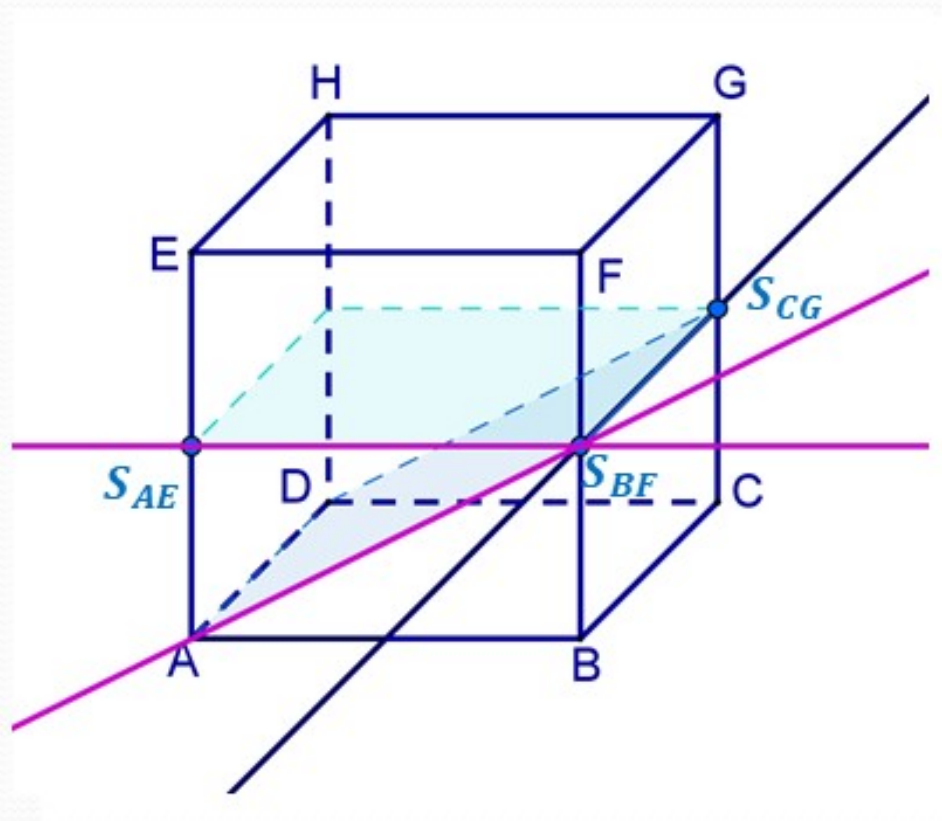
Príklad: Daný je kváder $ABCD A' B' C' D'$ ($a = 5\text{cm}$, $b = 3\text{cm}$, $c = 8\text{cm}$).
 Určte odchýlku rovín α, β , ak $\alpha = \overleftrightarrow{ABB'}$, $\beta = \overleftrightarrow{A'B'C}$.



Príklad: Daný je pravidelný štvorboký ihlan $ABCDV$, s výškou $v = 6\text{ cm}$ a podstavnou hranou $|AB| = 4\text{ cm}$.
Určte odchýlku bočnej steny od roviny podstavy.



Príklad: Daná je kocka $ABCDEFGH$, s hranou $a = 4\text{ cm}$.
 Určte odchýlku rovín $\overleftrightarrow{ADS_{BF}}$ a $\overleftrightarrow{S_{AE}S_{BF}S_{CG}}$.

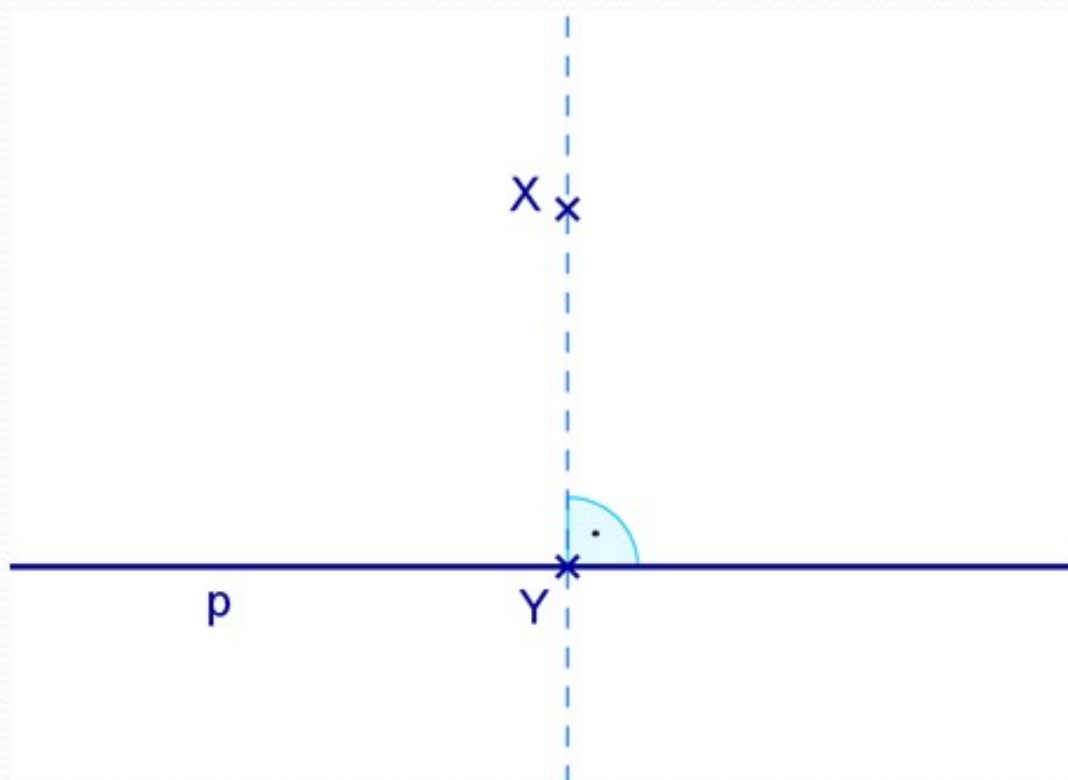


VZDIALENOSŤ dvoch útvarov U a V v priestore

je najmenšia vzdialenosť $|XY|$, kde $X \in U$ a $Y \in V$.

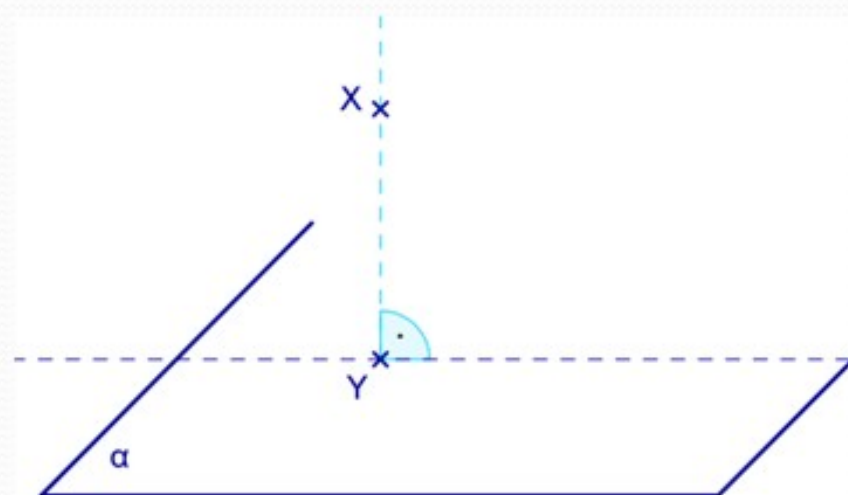
Vzdialenosť bodu od priamky je vzdialenosť bodu od jeho kolmého priemetu do tejto priamky.

$$|Xp| = |XY|$$

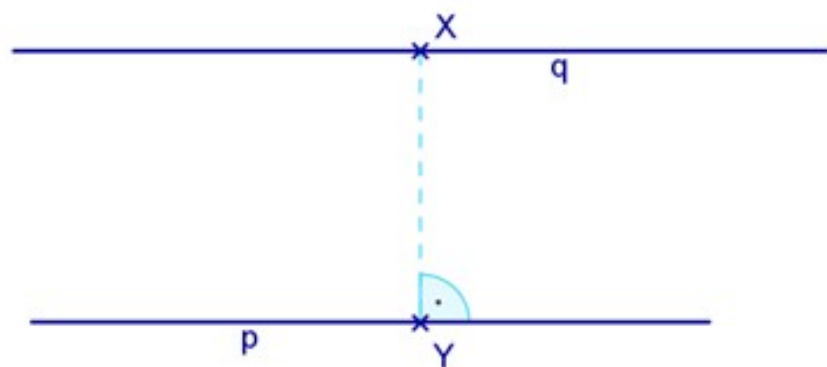


Vzdialenosť bodu od roviny je vzdialenosť bodu od jeho kolmého priemetu do tejto roviny.

$$|X\alpha| = |XY|$$



Vzdialenosť dvoch rovnobežných priamok je vzdialenosť ľubovoľného bodu jednej priamky od druhej.

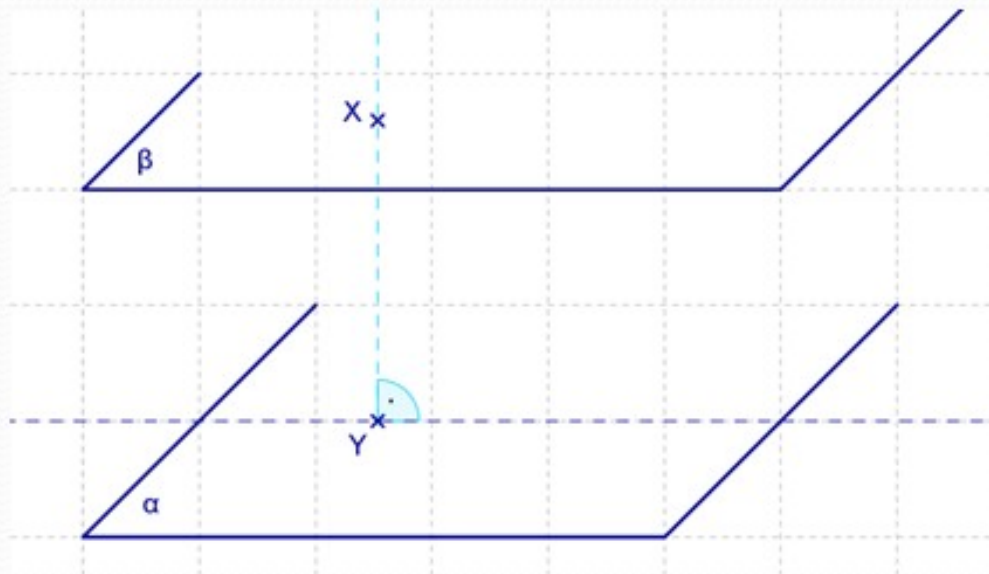
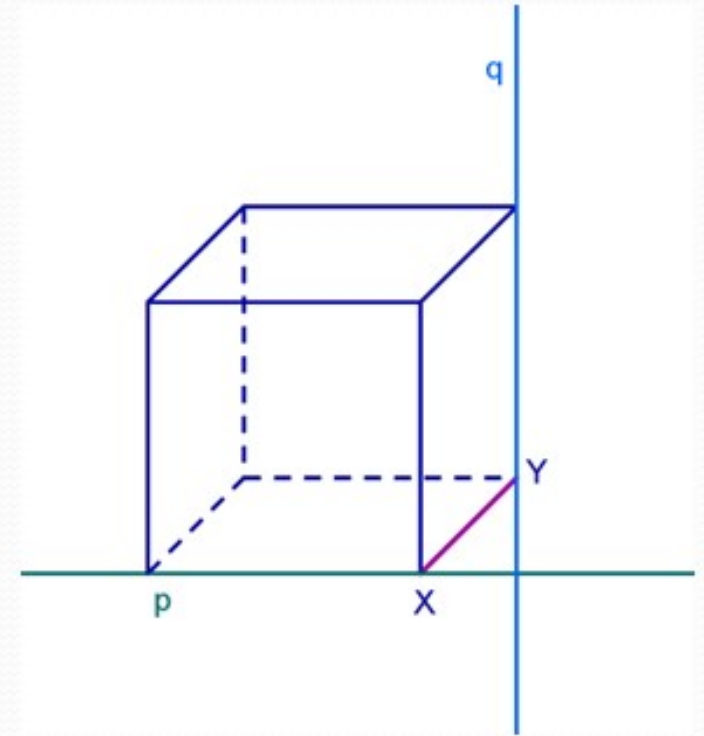


$$|pq| = |Xp|, X \in q$$

Vzdialenosť dvoch mimobežných priamok je veľkosť úsečky, ktorá je na ich osi vyťatá oboma mimobežkami.

(Os mimobežiek spája bod jednej mimobežky s bodom druhej mimobežky a je na obidve kolmá.)

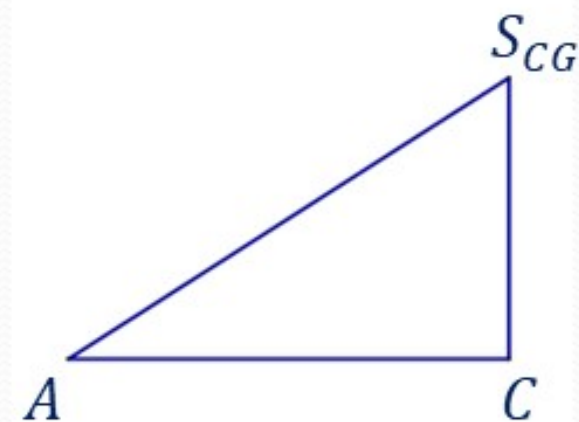
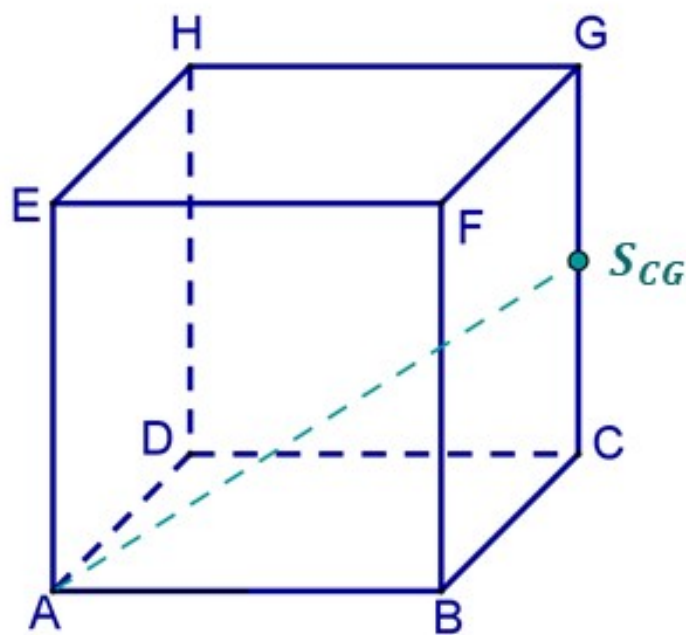
$$|pq| = |XY|$$



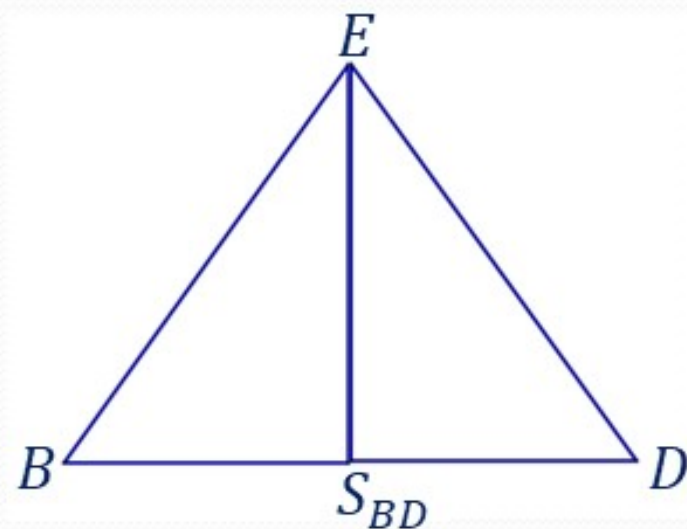
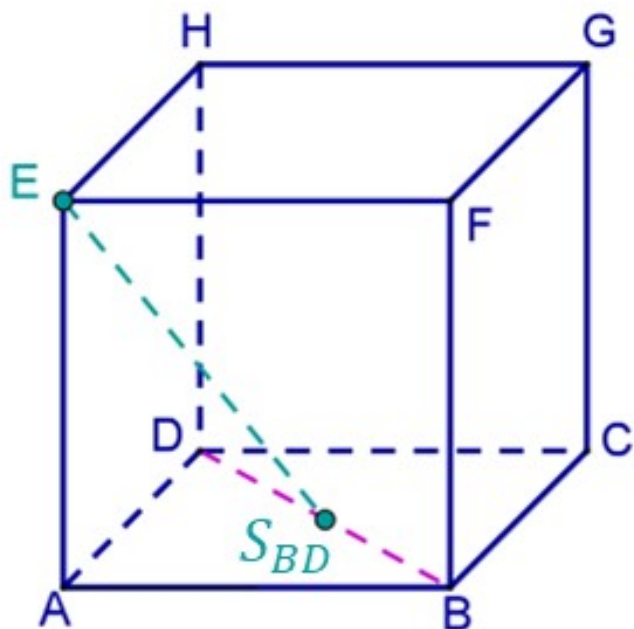
Vzdialenosť dvoch rovnobežných rovín je vzdialenosť ľubovoľného bodu jednej roviny od druhej.

$$|\alpha\beta| = |X\alpha|, X \in \beta$$

Príklad: Daná je kocka $ABCDEFGH$ s hranou $a = 6\text{ cm}$.
Určte vzdialenosť bodov A, S_{CG} .



Príklad: Daná je kocka $ABCDEFGH$ s hranou $a = 4 \text{ cm}$.
Určte vzdialenosť bodu E od priamky $p = \overleftrightarrow{BD}$.



Príklad: Daná je kocka $ABCDEFGH$ s hranou $a = 4\text{ cm}$.
 Určte vzdialenosť priamok $p = \overleftrightarrow{EG}$ a $q = \overleftrightarrow{S_{AB}S_{BC}}$.

