

ANALYTICKÁ GEOMETRIA

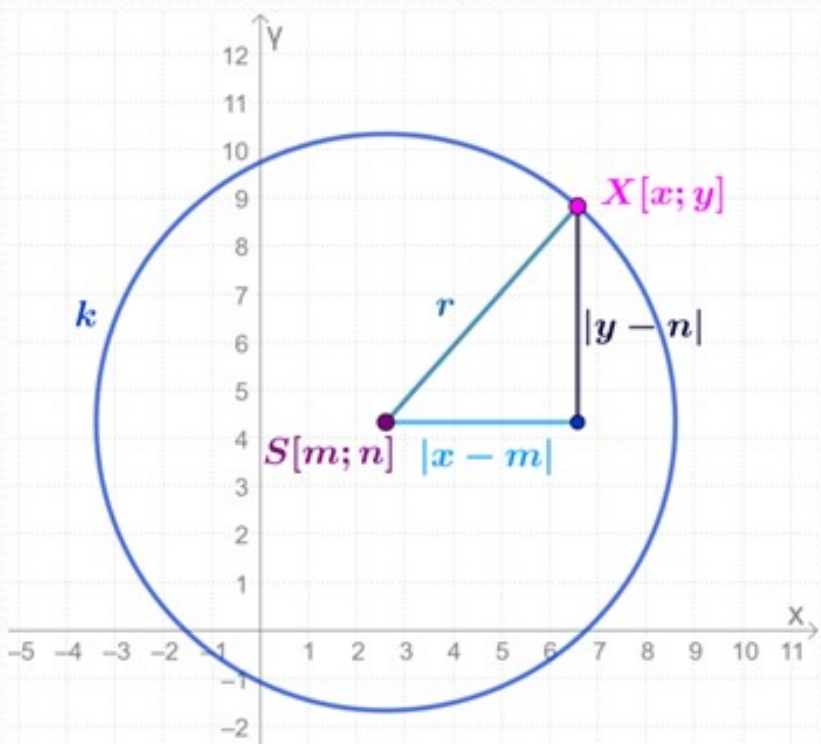
KRUŽNICA (ZHRNUTIE)

ZUZANA BARTOŠOVÁ

Kružnica

- je množina bodov rovnako vzdialených od stredu
- patrí medzi kužeľosečky, medzi kvadratické útvary

STREDOVÝ TVAR ROVNICE KRUŽNICE



$$\forall X[x; y] \in k(S; r)$$

$$k: x^2 + y^2 = r^2, \text{ ak } S[0; 0]$$

$$k: (x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2, \text{ ak } S[m; n]$$

Príklad:

Rozhodnite, či body $A[2; 0]$, $B[1; 1]$ a $C[4; 3]$ ležia na kružnici $k: x^2 + y^2 = 4$

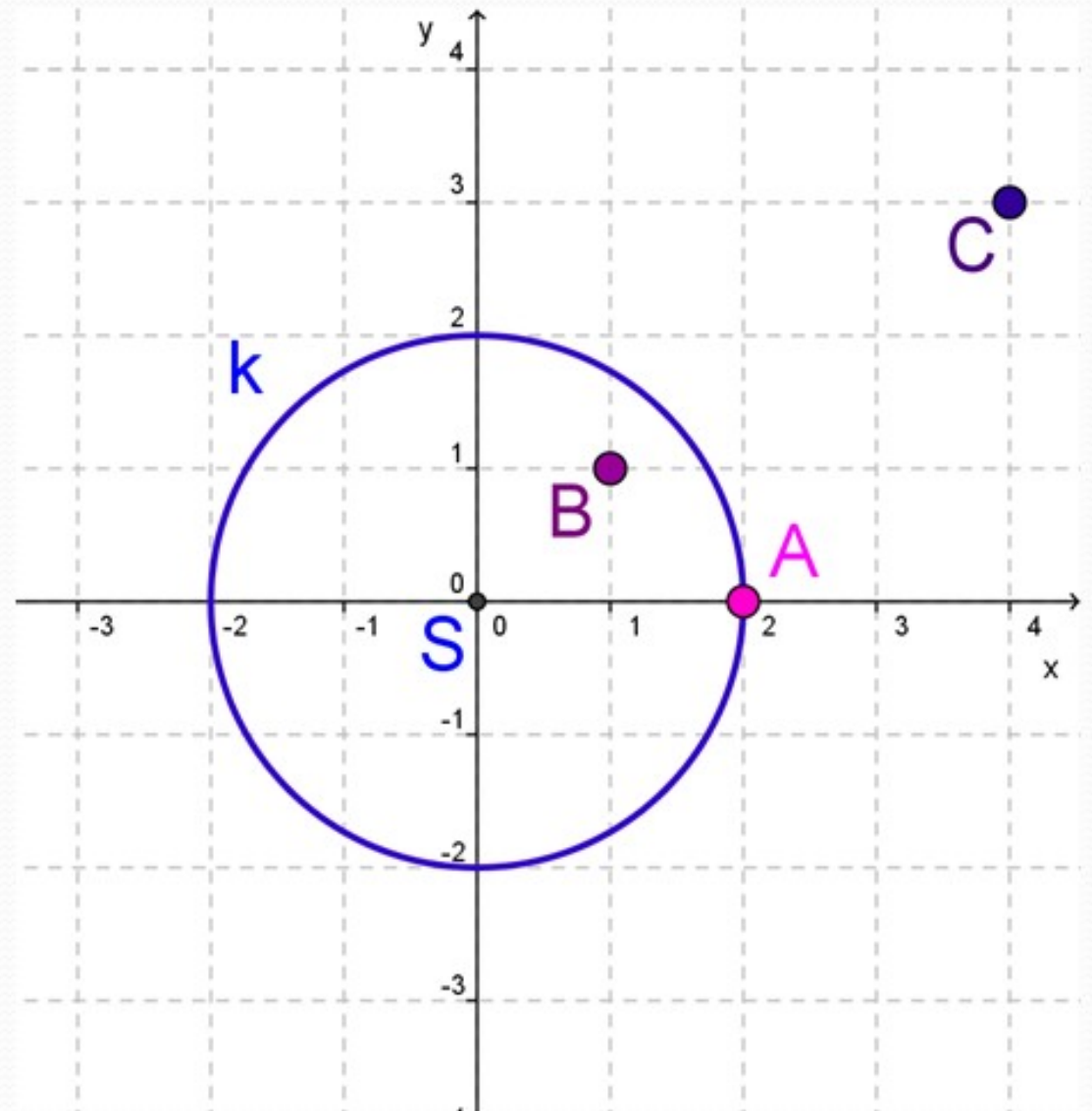
RIEŠENIE 1.

Znázornenie v Oxy

Určíme súradnice stredu a polomer kružnice:

$$S[0; 0]$$

$$r = 2$$



Príklad: Rozhodnite, či body $A[2; 0]$, $B[1; 1]$ a $C[4; 3]$ ležia na kružnici $k: x^2 + y^2 = 4$

RIEŠENIE 2.

Výpočtom

Dosadením súradníc daných bodov do rovnice kružnice zistíme ich polohu.

$$\begin{aligned} A \in k: 2^2 + 0^2 &\stackrel{?}{=} 4 \\ 4 &= 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \in k: 1^2 + 1^2 &\stackrel{?}{=} 4 \\ 2 &< 4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C \in k: 4^2 + 3^2 &\stackrel{?}{=} 4 \\ 25 &> 4 \end{aligned}$$

Záver:

Bod A leží na kružnici k .

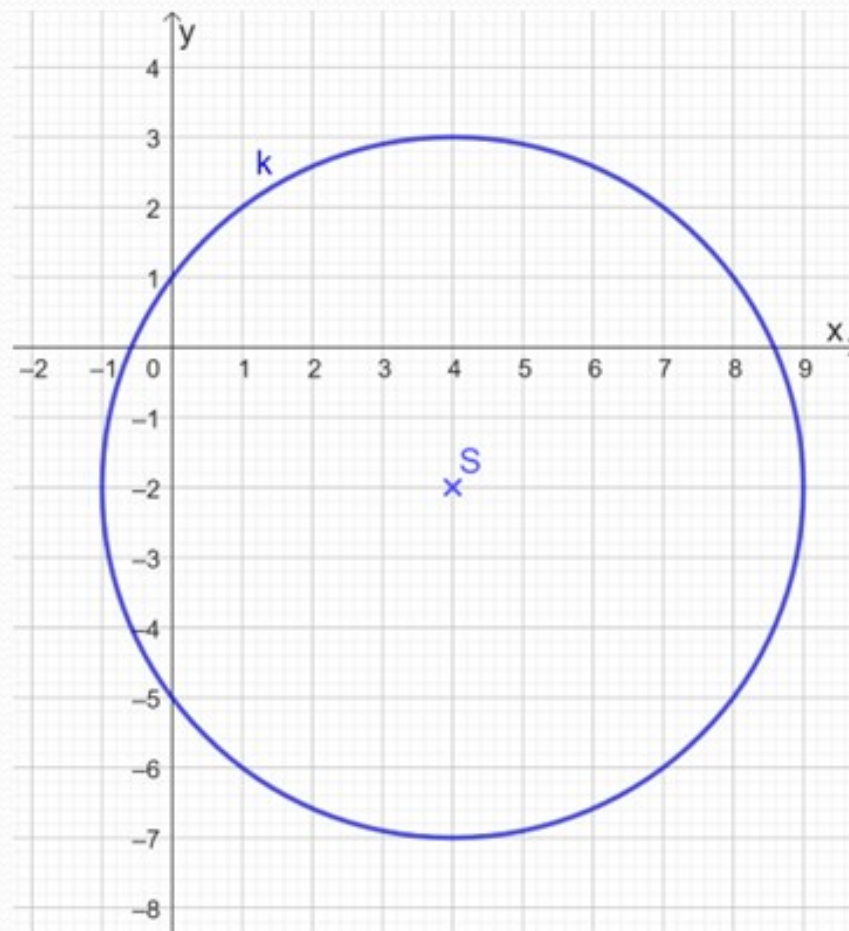
Bod B leží vnútri kružnice k .

Bod C leží zvonka kružnice k .

Príklad:

Napíšte rovnicu kružnice so stredom $S[4; -2]$ a polomerom $r = 5$.

$$k: (x - 4)^2 + (y + 2)^2 = 25$$



VŠEOBECNÝ TVAR ROVNICE KRUŽNICE

(VŠEOBECNÁ ROVNICA)

$$k: x^2 + y^2 + ax + by + c = 0$$

$$a \in R, b \in R, c \in R$$

Rovnica tohto tvaru je rovnicou kružnice len vtedy,
ak sa dá upraviť na stredový tvar.

Príklad: Určte stred a polomer kružnice danej rovnicou

$$k: x^2 + y^2 - 4x - 10y - 7 = 0$$

(Obe súradnice doplníme na štvorec.)

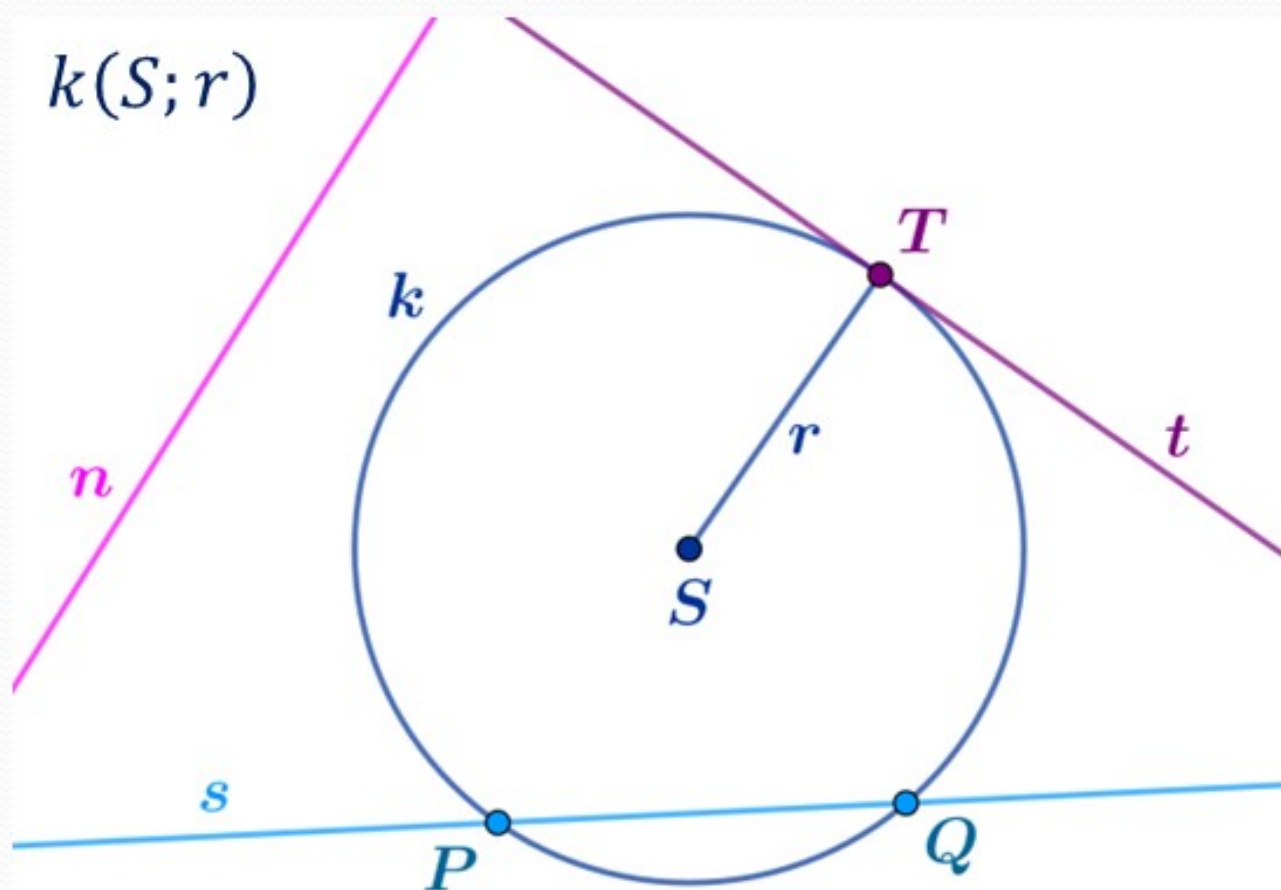
$$\underline{x^2 - 4x} + \underline{y^2 - 10y} - 7 = 0$$

$$\underbrace{(x - 2)^2}_{x^2 - 4x + 4} - 4 + \underbrace{(y - 5)^2}_{y^2 - 10y + 25} - 25 - 7 = 0$$

$$k: (x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 36$$

Daná rovnica je rovnicou kružnice
so stredom $S[2; 5]$ a polomerom $r = 6$.

Vzájomná poloha priamky a kružnice



Priamka môže byť:

n ...nesečnica kružnice

$$n \cap k = \emptyset$$

t ...dotyčnica kružnice

$$t \cap k = \{T\}$$

s ...sečnica kružnice

$$s \cap k = \{P; Q\}$$

Príklad: Určte vzájomnú polohu priamky $p: 2x + y - 1 = 0$
a kružnice $k: (x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 16$

Ako
na to?

1. obrázok

Narysovať k a p v Oxy .

2. vzdialenosť

Porovnať vzdialenosť priamky od stredu kružnice a veľkosť polomeru kružnice.

3. spoločné body

Nájsť prienik priamky a kružnice.

Príklad: Určte vzájomnú polohu priamky $p: 2x + y - 1 = 0$
a kružnice $k: (x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 16$

Nájdeme prienik priamky a kružnice, teda body, ktorých súradnice vyhovujú obom rovniciam (sústava rovníc kružnice a priamky).

$$p: 2x + y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 - 2x$$

$$\underline{k: (x + 4)^2 + (y + 1)^2 = 16}$$

$$p \cap k: (x + 4)^2 + (1 - 2x + 1)^2 = 16$$

$$(x + 4)^2 + (2 - 2x)^2 = 16$$

$$x^2 + 8x + 16 + 4 - 8x + 4x^2 = 16$$

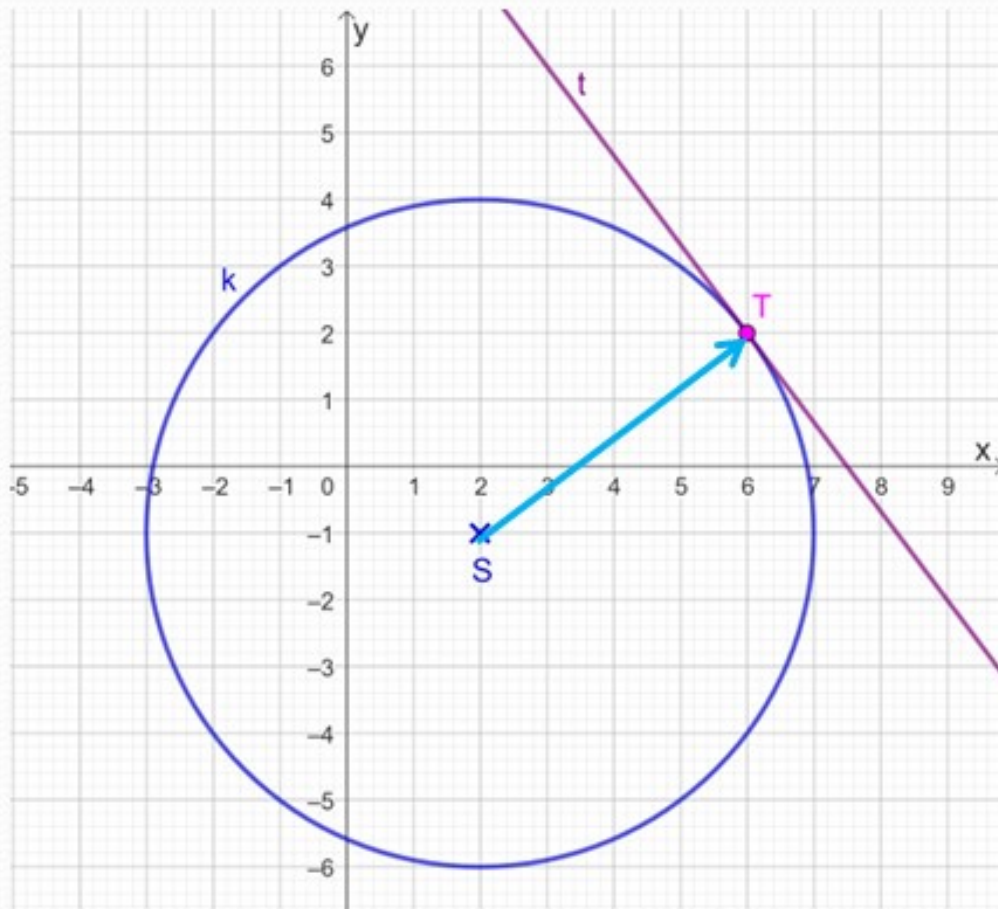
$$x^2 = -\frac{4}{5}$$

Rovnica nemá v R riešenie, teda $p \cap k = \emptyset$,

priamka p je **nesečnicou** kružnice k .

Príklad: Napíšte rovnicu dotyčnice kružnice

$k: (x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 25$ v jej bode $T[6; 2]$.



$$S[2; -1], r = 5$$

Hľadáme všeobecnú rovnicu priamky t .

$$ax + by + c = 0$$

$$\vec{n}_t = \overrightarrow{ST} = (4; 3)$$

$$t: 4x + 3y + c = 0$$

$$T \in t: 4 \cdot 6 + 3 \cdot 2 + c = 0$$

$$c = -30$$

$$t: 4x + 3y - 30 = 0$$

Rovnica dotyčnice kružnice

$$k: (x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

v bode $T[x_0; y_0]$

$$t: (x_0 - m) \cdot (x - m) + (y_0 - n) \cdot (y - n) = r^2$$

