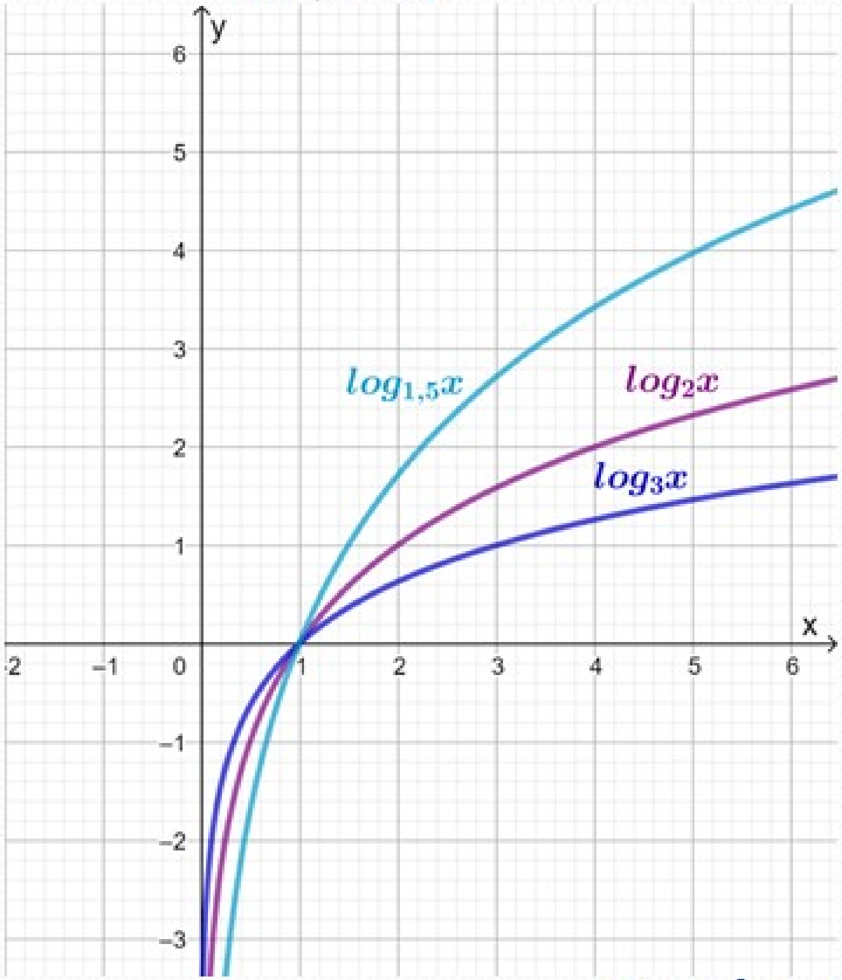
LOGARITMICKÉ FUNKCIE A ROVNICE
(ZHRNUTIE)

ZUZANA BARTOŠOVÁ

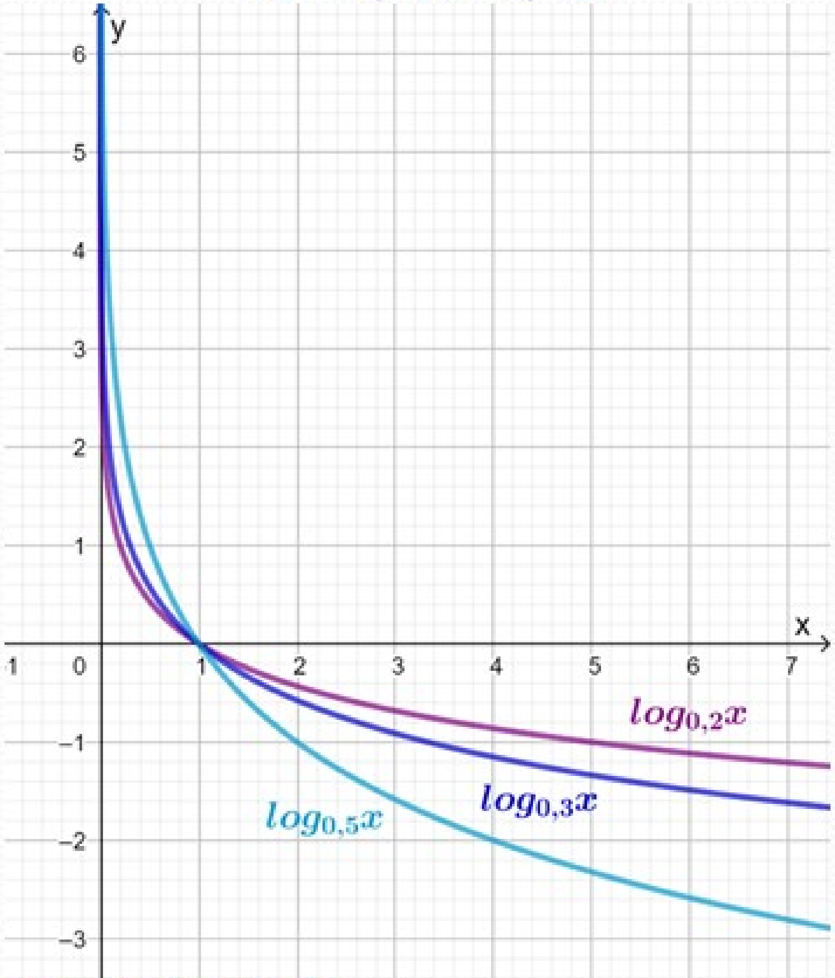
Logaritmická funkcia $y = \log_a x$ je inverznou funkciou k exponenciálnej funkci $y = a^x, a \in R^+ - \{1\}$

$$\boldsymbol{f}: \boldsymbol{y} = \boldsymbol{log_a\, x}, a \in R^+ - \{1\}$$

$\boldsymbol{a > 1}$



$\boldsymbol{0 < a < 1}$



Os y je asymptotou grafu funkcie

VLASTNOSTI LOGARITMICKEJ FUNKCIE

$$f: y = \log_a x, a \in R^+ - \{1\}$$

$a > 1$	$0 < a < 1$
▪ $D(f) = R^+ = (0; \infty)$	▪ $D(f) = R^+$
▪ $H(f) = R$	▪ $H(f) = R$
▪ **rastúca** funkcia	▪ **klesajúca** funkcia
▪ nie je ohraničená	▪ nie je ohraničená
▪ nemá extrémy	▪ nemá extrémy
▪ nie je párna, ani nepárna	▪ nie je párna, ani nepárna
▪ prostá	▪ prostá
▪ $f(1) = 0$	▪ $f(1) = 0$
▪ grafom je logaritmická krivka	▪ grafom je logaritmická krivka

Dôležité: logaritmická funkcia je definovaná len pre kladné hodnoty.

Príklad: Nájdite všetky hodnoty parametra $\boldsymbol{p}$, pre ktoré je daná funkcia

a) rastúca

b) klesajúca

$$f: y = \log_{(p-3)} x$$

a) Logaritmická funkcia je rastúca, ak $a > 1$

$$p - 3 > 1$$

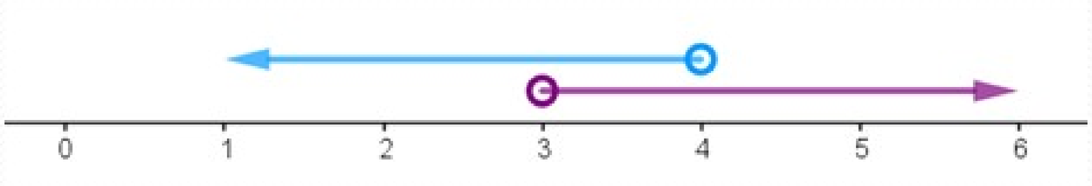
$$p > 4$$

Daná funkcia je rastúca, ak $p \in (4; \infty)$.

b) Logaritmická funkcia je klesajúca, ak $0 < a < 1$

$$p - 3 > 0 \wedge p - 3 < 1$$

$$p > 3 \wedge p < 4$$



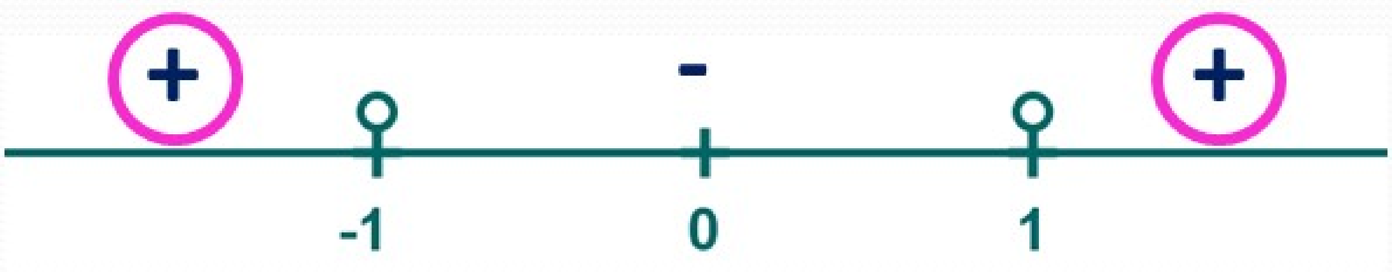
Daná funkcia je klesajúca, ak $p \in (3; 4)$.

Príklad: Určte definičný obor funkcie

$$g\colon y = \log_3 \frac{x-1}{x+1}$$

Logaritmická funkcia je definovaná len pre <u>kladné hodnoty</u> („**všetko za log**“ musí byť kladné).

$$\frac{x-1}{x+1} > 0$$



$$D(g) = (-\infty;\ -1) \cup (1;\ \infty)$$

Funkčné hodnoty logaritmickej funkcie sú logaritmy.

DEFINÍCIA LOGARITMU:

$$\boldsymbol{\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x}$$

Základ logaritmu: $\boldsymbol{a \in R^+ - \{1\}}$

Logaritmované číslo: $\boldsymbol{x \in R^+}$

Logaritmus čísla x pri základe a je také číslo y, ktorým treba umocniť základ a, aby sme dostali číslo x („srdiečko“).

Príklad: Vypočítajte a svoje riešenie zdôvodnite („srdiečko“):

$$\log_2 16 = 4 \Leftrightarrow 2^4 = 16$$

$$\log_5 25 = 2 \Leftrightarrow 5^2 = 25$$

Logaritmus so základom **10** sa nazýva **DEKADICKÝ**.

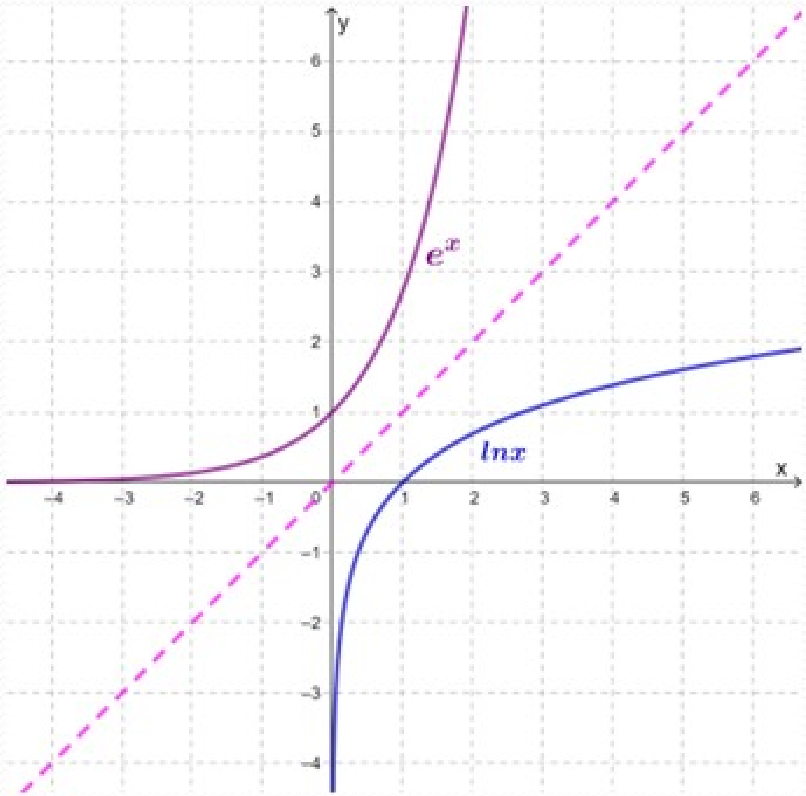
$$\mathbf{\log_{10} x = \log x}$$

x	10	1000	0,01	$\frac{1}{100000}$	$\sqrt{10}$	$\sqrt[3]{10}$
$\log_{10} x$	1	3	-2	-5	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

Špeciálna logaritmická funkcia.

$$\boldsymbol{y = \log_e x}$$

$$\boldsymbol{e = 2,718\ldots}$$



Je to konštanta, iracionálne číslo, ktoré sa nazýva **Eulerovo číslo.**

Logaritmus so základom *e* sa nazýva **PRIRODZENÝ.**

$$\boldsymbol{\log_e x = \ln x}$$

Vzorec, ktorý slúži na prevod logaritmov z jedného základu na iný:
(dôkaz v učebnici 3, na str.71):

$$\boxed{\boldsymbol{\log_y x = \frac{\log_a x}{\log_a y}}}$$

$$x \in R^+, y \in R^+ - \{1\}, a \in R^+ - \{1\}$$

Príklad: Vypočítajte $\log_3 8$.

Môžeme použiť dekadické logaritmy:

$$\log_3 8 = \frac{\log_{10} 8}{\log_{10} 3} = \frac{\log 8}{\log 3} \doteq 1{,}893$$

alebo prirodzené logaritmy:

$$\log_3 8 = \frac{\ln 8}{\ln 3} \doteq 1{,}893$$

$$\log_3 8 \doteq 1{,}893$$

VETY O LOGARITMOCH

$\forall\, x \in R^{+}, y \in R^{+}, a \in R^{+} - \{1\}, r \in R$:

- $\mathbf{log}_{a}(\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}) = \mathbf{log}_{a}\, \boldsymbol{x} + \mathbf{log}_{a}\, \boldsymbol{y}$

Logaritmus súčinu rovná sa súčtu logaritmov (s rovnakým základom).

- $\boldsymbol{log_{a}\frac{x}{y} = log_{a}\, x - log_{a}\, y}$

Logaritmus podielu rovná sa rozdielu logaritmov (s rovnakým základom).

- $\boldsymbol{log_{a}\, x^{r} = r \cdot log_{a}\, x}$

Logaritmus mocniny rovná sa súčinu exponentu a logaritmu základu mocniny.

Príklad: Vypočítajte:

$$\log_{0,5} 6 + \log_{0,5} \frac{4}{6} = \log_{0,5} \left(6 \cdot \frac{4}{6} \right) = \log_{0,5} 4 = -2$$

$$\log_3 2 - \log_3 6 = \log_3 \frac{2}{6} = \log_3 \frac{1}{3} = -1$$

$$\frac{\log_3 5^3}{\log_3 \sqrt{5}} = \frac{\log_3 5^3}{\log_3 5^{\frac{1}{2}}} = \frac{3 \cdot \log_3 5}{\frac{1}{2} \cdot \log_3 5} = \frac{3}{\frac{1}{2}} = 6$$

Príklad: Zapíšte ako jeden logaritmus

$$1 + \log_3 2 = \log_3 3 + \log_3 2 = \log_3 (3 \cdot 2) = \log_3 6$$

$$2 \log b + 2 = \log b^2 + 2 = \log b^2 + \log 100 = \log 100 b^2$$

$$b \in R^+$$

Logaritmické rovnice
sú rovnice s neznámou v argumente, alebo v základe logaritmu.

Dôležité:
Určiť **podmienku** pre argument, prípadne základ logaritmu.

<u>POSTUPY PRI RIEŠENÍ</u>:

A. Použitie definície logaritmu (základné rovnice, „srdiečko“)

$$\log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x, a \in R^+ - \{1\}, x \in R^+$$

B. Úprava oboch strán rovnice na logaritmus s rovnakým základom (použitie viet o logaritmoch) a odlogaritmovanie rovnice

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow f(x) = g(x), a \in R^+ - \{1\}$$

C. Zavedenie substitúcie

Príklady (A)

Riešte v R rovnice:

$$\log_3(x-2) = 2$$

$$x - 2 > 0$$
$$x > 2$$
$$x \in (2;\ \infty)$$

$$x - 2 = 3^2$$
$$x = 11$$
$$\boldsymbol{P = \{11\}}$$

$$\underbrace{\log_2(x+7) + \log_2 x}_{} = 3$$

$$x + 7 > 0 \wedge x > 0$$
$$x > -7 \wedge x > 0$$
$$x \in (0;\ \infty)$$

$$\log_2[(x+7)\cdot x] = 3$$
$$(x+7)\cdot x = 2^3$$

Po úpravách získame kvadratickú rovnicu, ktorú hravo vyriešite.

$$x^2 + 7x - 8 = 0$$

$$x_1 = 1 \qquad x_2 = -8$$

$$\boldsymbol{P = \{1\}}$$

Príklad (B): Riešte v R rovnicu

$$2\log x = \log(x+6)$$

$$x+6>0 \wedge x>0$$

$$x>-6 \wedge x>0$$

$$x \in (0;\ \infty)$$

$$\log x^2 = \log(x+6)$$

$$x^2 = x+6$$

$$x^2 - x - 6 = 0$$

Kvadratickú rovnicu vyriešte.

$x_1 = 3 \qquad x_2 = -2$

$$\boldsymbol{P} = \{\mathbf{3}\}$$

Nezabudnite na skúšku správnosti.

Príklad (C): Riešte v R rovnicu

$$\log^2 x + 2\log x + 1 = 0 \qquad x \in (0;\ \infty)$$

Zavedieme substitúciu: $\log x = t$

Dostaneme kvadratickú rovnicu: $t^2 + 2t + 1 = 0$

$$(t+1)^2 = 0$$

$$t = -1$$

Použijeme resubstitúciu: $\log x = -1$

$$x = 10^{-1}$$

$$\boldsymbol{P = \left\{ \frac{1}{10} \right\}}$$

Nezabudnite na skúšku správnosti.